MET1181 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2019
Oppgaver

I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 16
Repetisjon.

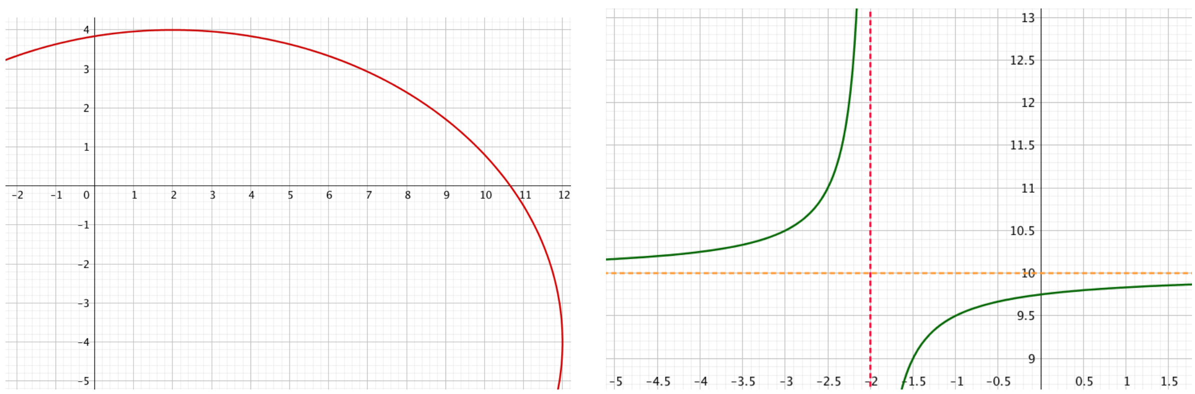
Flervalgseksamen 2019v
Flervalgseksamen 2018h

Oppgaver for veiledningstimene mandag 18/11 og 9/12 fra kl 14 i Study Area

Oppgave 1

a) Finn likningen til ellipsen i figur 1. Bestem også sentrum og halvaksene til ellipsen.

b) Finn funksjonsuttrykket til hyperbelen i figur 1 (med asymptoter inntegnet). Bestem også likningene til asymptotene til hyperbelen.



Figur 1: En ellipse og en hyperbel

Oppgave 2

a) En kurve er gitt som løsningene på likningen $64x^2 + 100y^2 - 256x + 800y = 4544$. Bruk implisitt derivasjon til å uttrykke y' ved hjelp av y og x.

b) Bestem punktene på kurven med $x = 8$.

c) Finn tangentlikningene til punktene i (b).

Oppgave 3 Finn den omvendte funksjonen $g(x)$ og definisjonsmengden D_g til funksjonen $f(x)$ med definisjonsmengde D_f.

a) $f(x) = 2x + 5$ med $D_f = [3, \infty\rangle$ b) $f(x) = 10 + \frac{1}{x-2}$ med $D_f = \langle 2, \infty\rangle$

c) $f(x) = (x-5)^3 + 2$ med $D_f = \mathbb{R}$ (alle reelle tall)

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{18}{x} & \text{hvis } 0 < x \leqslant 6 \\ 4 - \frac{x}{6} & \text{hvis } 6 < x \leqslant 45 \end{cases}$$

Oppgave 4 Finn eksakte og tilnærmede verdier i følgende oppgaver. Vi antar kontinuerlig forrentning.

a) Du vil sette 50 000 inn på en konto. Finn den nominelle renten som gir saldo på 150 000 etter 15 år.
b) Bestem den nominelle renten slik at nåverdien til 9 millioner om 6 år er 5 millioner.
c) Du setter inn 500 000 på en konto med 3,9% nominell rente. Bestem hvor lenge pengene må stå før saldoen er 1 200 000.
d) Du vurderer å investere 45 millioner i et prosjekt som lover en engangutbetaling på 70 millioner. Anta internrenten til denne betalingsstrømmen skal være 10%. Bestem når utbetalingen skal finne sted hvis avtalen er balansert (rettferdig).

Oppgave 5 Løs ulikhetene.
a) $3e^x \leqslant 10$ b) $\ln(x-7) > 5$ c) $\ln\frac{2x+5}{x-3} < 0$ d) $\frac{e^x}{e^x-3} < -2$

Oppgave 6 Vi har funksjonen $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$ med definisjonsområde $D_f = [0, 3]$.

a) Bestem de stasjonære punktene til $f(x)$
b) Avgjør hvor $f(x)$ er voksende og hvor $f(x)$ er avtagende
c) Bestem de lokal minimumspunktene og de lokal maksimumspunktene til $f(x)$
d) Bestem hvor mange globale maksimumspunkter/minimumspunkter som $f(x)$ har og beregn (eventuelt) maksimum og minimum til funksjonen.
e) Avgjør hvor $f(x)$ er konveks/konkav.

Oppgave 7 Finn de stasjonære punktene til $f(x)$, bestem hvor $f(x)$ er strengt avtagende/voksende og finn eventuelle lokale og globale maksimums- og minimumspunkter.
a) $f(x) = 5 - \ln(x^2 - 10x + 30)$ b) $f(x) = e^{x^3-12x}$

Oppgave 8 Vi har funksjonen $f(x) = \ln(-0{,}01x^2 + 0{,}8x - 12)$ med definisjonsmengde $D_f = \langle 20, 60\rangle$. Bestem (lokale) minimumspunkter og maksimumspunkter. Forklar hvorfor de stasjonære punktene gir minimum/maksimum ved å bruke konveksitet/konkavitet av funksjonen. Beregn minimum/maksimum til funksjonen.

Løsningsforslag

NB: Det finnes alternative løsninger på mange av oppgavene som kan være (minst) like gode som de jeg har valgt her.

Oppgave 1

a) Sentrum i ellipsen finner vi som skjæringspunktet mellom symmetrilinjene $x = 2$ og $y = -4$, dvs $\underline{\underline{(2, -4)}}$. Vi leser av horisontal halvakse: $\underline{\underline{10}}$, vertikal halvakse: $\underline{\underline{8}}$. Standardform for likningen til ellipsen er dermed $\underline{\underline{\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y+4)^2}{64} = 1}}$.
b) Vi leser av vertikal asymptote: linjen $x = -2$, horisontal asymptote: linjen $y = 10$. Standardform til funksjonsuttrykket for hyperbelen er da $f(x) = 10 + \frac{a}{x+2}$. Vi bestemmer a ved å sette inn et punkt på grafen. Her er $(-3, 10{,}5)$ et tydelig punkt. Det gir en likning for a: $10 + \frac{a}{-3+2} = 10{,}5$ som har løsning $a = -0{,}5$ og dermed $f(x) = \underline{\underline{10 - \frac{0{,}5}{x+2}}}$

Oppgave 2

a) Vi deriverer begge sidene av likningen ved å bruke potensregelen flere ganger og kjerneregelen på y^2 [vi tenker at y er en funksjon av x lokalt på kurven, dvs $y = y(x)$, men vi trenger ikke noe uttrykk for $y(x)$]. Da får vi $128x + 200y \cdot y' - 256 + 800y' = 0$ som gir likningen $200(y+4)y' = 128(2-x)$ dvs $\underline{\underline{y' = 0{,}64 \cdot \frac{2-x}{y+4}}}$
b) Med $x = 8$ får vi likningen $64^2 + 100y^2 - 256 \cdot 8 + 800y = 4544$, dvs $y^2 + 8y = 24{,}96$. Vi fullfører kvadratet: $(y+4)^2 = 24{,}96 + 16 = 40{,}96$. Det gir $y = -4 \pm 6{,}4$, dvs $y = -10{,}4$ eller $y = 2{,}4$ som gir punktene $\underline{\underline{P = (8, -10{,}4)}}$ og $\underline{\underline{Q = (8, 2{,}4)}}$

c) For P: Vi setter inn i uttrykket for y' fra (a): $y' = 0{,}64 \cdot \frac{2-8}{-10{,}4+4} = 0{,}6$. Ettpunktsformelen gir $p(x) - (-10{,}4) = 0{,}6(x-8)$, dvs $\underline{\underline{p(x) = 0{,}6x - 15{,}2}}$ (eksakt svar)
For Q: $y' = 0{,}64 \cdot \frac{2-8}{2{,}4+4} = -0{,}6$. Ettpunktsformelen gir $q(x) - 2{,}4 = -0{,}6(x-8)$, dvs $\underline{\underline{q(x) = -0{,}6x + 7{,}2}}$ (eksakt svar)
NB: Kurven er gitt i oppgave 1a, men dette trenger du ikke å vite for å løse oppgave 2.

Oppgave 3

a) For å finne uttrykket for den omvendte funksjonen setter vi $y = 2x + 5$ og løser likningen for x. Det gir $x = 0{,}5y - 2{,}5$. Så skifter vi variabel til x og får $\underline{\underline{g(x) = 0{,}5x - 2{,}5}}$ som uttrykket for den omvendte funksjonen. Som alltid med omvendte funksjoner er $D_g = V_f$. For å finne verdimengden for $f(x)$ ser vi at $f(x)$ er en voksende (og lineær) funksjon med minste verdi $f(3) = 11$ og som oppnår alle større verdier når x vokser, dvs $V_f = [11, \infty\rangle$ og dermed $\underline{\underline{D_g = [11, \infty\rangle}}$

b) Løser likningen $y = 10 + \frac{1}{x-2}$ for x. Det gir $x = 2 + \frac{1}{y-10}$. Skifter variabel og får at $\underline{\underline{g(x) = 2 + \frac{1}{x-10}}}$ som uttrykket for den omvendte funksjonen. $f(x)$ er en hyperbel med vertikal asymptote linjen $x = 2$, som er strengt avtagende for $x > 2$, og som har horisontal asymptote linjen $y = 10$. Dermed er $V_f = \langle 10, \infty\rangle$ og $\underline{\underline{D_g = \langle 10, \infty\rangle}}$

c) Løser likningen $y = (x-5)^3 + 2$ for x og får $x = 5 + (y-2)^{\frac{1}{3}}$. Dermed er $\underline{\underline{g(x) = 5 + (x-2)^{\frac{1}{3}}}}$ uttrykket for for den omvendte funksjonen. Fordi $y = f(x)$ blir så negativ du vil ved å velge store negative x, og $y = f(x)$ blir så positiv du vil ved å velge store positive x, er $V_f = \mathbb{R}$. Altså er $\underline{\underline{D_g = \mathbb{R}}}$

d) Vi tenker at $f(x)$ består av to forskjellige funksjoner med hvert sitt definisjonsområde og gjør som i (a-c) for hver av dem. Det gir $\underline{\underline{g(x) = \begin{cases} \frac{18}{x} & \text{hvis } x \geqslant 3 \\ 24 - 6x & \text{hvis } -\frac{21}{6} \leqslant x < 3 \end{cases}}}$

Oppgave 4

a) La r være den årlige nominelle renten. Den årlige vekstfaktoren er da e^r og vi får likningen $50\,000 \cdot e^{15r} = 150\,000$ som gir likningen $e^{15r} = 3$. Setter vs og hs inn i $\ln(x)$ og får likningen $15r = \ln(3)$ som gir løsningen $\underline{\underline{r = \frac{\ln 3}{15} = 7{,}32\%}}$

b) La r være den årlige nominelle renten. Nåverdien til 9 millioner er da (i millioner) $\frac{9}{e^{6r}}$ som skal være 5 millioner. Vi får altså likningen $\frac{9}{e^{6r}} = 5$, dvs $e^{6r} = \frac{9}{5}$. Setter vs og hs inn i $\ln(x)$ og får $6r = \ln(\frac{9}{5}) = \ln(9) - \ln(5)$, dvs $\underline{\underline{r = \frac{\ln 9 - \ln 5}{6} = 9{,}80\%}}$

c) Vi setter $x =$ antall år pengene må stå på konto. Da får vi likningen $500\,000 \cdot e^{0{,}039x} = 1\,200\,000$, dvs $e^{0{,}039x} = \frac{12}{5}$. Vi setter vs og hs inn i $\ln(x)$. Vi får at pengene må stå i $\underline{\underline{x = \frac{\ln 12 - \ln 5}{0{,}039} = 22{,}45 \text{ år}}}$

d) Vi setter $x =$ tiden mellom investering og utbetaling (i år). Den årlige vekstfaktoren er 1,1 og dermed får vi likningen $45 \cdot 1{,}1^x = 70$, dvs $1{,}1^x = \frac{70}{45}$. Vi setter inn vs og hs i e^x og får $x \cdot \ln(1{,}1) = \ln 70 - \ln 45$. Dermed må utbetaling skje $\underline{\underline{\frac{\ln 70 - \ln 45}{\ln(1{,}1)} = 4{,}64 \text{ år}}}$ etter investeringen.

Oppgave 5

a) Vi setter vs og hs av ulikheten $e^x \leqslant \frac{10}{3}$ inn i $\ln(x)$ og får $\underline{\underline{x \leqslant \ln(10) - \ln(3)}}$

b) Vi setter vs og hs inn i e^x og får ulikheten $x - 7 > e^5$ som gir $\underline{\underline{x > 7 + e^5}}$

c) Vi setter vs og hs inn i e^x og får ulikheten $\frac{2x+5}{x-3} < 1$, dvs $\frac{2x+5}{x-3} - 1 < 0$, dvs $\frac{x+8}{x-3} < 0$. Nå kan vi bruke fortegnsskjema og få løsningen $\underline{\underline{x \text{ i } \langle -3, 8\rangle}}$

d) Her kan vi sette $u = e^x$ og løse ulikheten $\frac{u}{u-3} < -2$, dvs $\frac{u}{u-3} + 2 < 0$, dvs $\frac{3(u-2)}{u-3} < 0$. Nå kan vi bruke fortegnsskjema og få $e^x = u$ i $\langle 2, 3\rangle$, dvs $\underline{\underline{x \text{ i } \langle \ln(2), \ln(3)\rangle}}$.

Oppgave 6

a) De stasjonære punktene er løsningene til likningen $f'(x) = 0$ med $0 \leqslant x \leqslant 3$. Vi beregner $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$. Likningen $3x^2 - 8x + 4 = 0$ har løsningene $\underline{\underline{x = \frac{2}{3}}}$, $\underline{\underline{x = 2}}$ som begge ligger i D_f.

b) Vi har $f'(x) > 0$ for $x < \frac{2}{3}$ og for $x > 2$ og $f'(x) < 0$ for $\frac{2}{3} < x < 2$. Da er $f(x)$ voksende for x i $\underline{\underline{[0\,,\,\frac{2}{3}]}}$, avtagende for x i $\underline{\underline{[\frac{2}{3}\,,\,2]}}$ og voksende for x i $\underline{\underline{[2\,,\,3]}}$.

c) Siden det ikke er knekkpunkter for denne funksjonen er de lokal minimumspunktene og de lokal maksimumspunktene til $f(x)$ enten stasjonære punkter eller endepunkter. Fra forrige punkt får vi at $\underline{\underline{x = 0}}$ og $\underline{\underline{x = 2}}$ er lokale minimumspunkter mens $\underline{\underline{x = \frac{2}{3}}}$ og $\underline{\underline{x = 3}}$ er lokale maksimumspunkter.

d) For å finne globale ekstremalpunkter beregner vi $f(0) = 3$ og $f(2) = 3$ som altså gir at både $\underline{\underline{x = 0}}$ og $\underline{\underline{x = 2}}$ er globale minimumspunkter. Fordi $f(\frac{2}{3}) = 4{,}19$ mens $f(3) = 6$ er $\underline{\underline{x = 3}}$ eneste globale maksimumspunkt. Minimum til funksjonen er altså $f(0) = f(2) = \underline{\underline{3}}$ mens maksimum er $f(3) = \underline{\underline{6}}$.

e) Vi beregner $f''(x) = 6x - 8$. $f(x)$ er konkav for de x slik at $f''(x) \leqslant 0$, dvs $6x - 8 \leqslant 0$, dvs $\underline{\underline{x \leqslant \frac{4}{3}}}$. $f(x)$ er konveks for de x slik at $f''(x) \geqslant 0$, dvs $\underline{\underline{x \geqslant \frac{4}{3}}}$.

Oppgave 7

a) Vi bruker kjerneregelen med $u(x) = x^2 - 10x + 30$, $g(u) = 5 - \ln(u)$, $u'(x) = 2x - 10 = 2(x-5)$, $g'(u) = -\frac{1}{u}$ som gir $f'(x) = -\frac{2(x-5)}{x^2-10x+30}$. Fordi $x = 5$ ikke er en rot i nevneren kan ikke brøken forkortes. Så løser vi likningen $f'(x) = 0$, dvs $2(x-5) = 0$, dvs $\underline{\underline{x = 5}}$ er eneste stasjonære punkt. Vi fullfører kvadratet $x^2 - 10x + 30 = (x-5)^2 + 5$ som alltid er større enn eller lik 5. Dermed ser vi at $f'(x)$ er større enn 0 for $x < 5$ og $f'(x)$ er mindre enn 0 for $x > 5$. Altså er $f(x)$ $\underline{\underline{\text{strengt voksende i intervallet } \langle -\infty, 5]}}$ og $\underline{\underline{\text{strengt avtagende i intervallet } [5, \infty\rangle}}$ og $\underline{\underline{x = 5 \text{ er et globalt maksimumspunkt}}}$.

b) Vi bruker kjerneregelen med $u(x) = x^3 - 12x$, $g(u) = 3e^u$, $u'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$ og $g'(u) = 3e^u$ som gir $f'(x) = 3(x^2-4)e^{x^3-12x}$. Så løser vi likningen $f'(x) = 0$, dvs $3(x^2-4)e^{x^3-12x} = 0$. Vi har $3e^u > 0$ og får dermed likningen $x^2 - 4 = 0$, dvs at $\underline{\underline{x = \pm 2}}$ er de stasjonære punktene til $f(x)$. Vi får også faktoriseringen $f'(x) = 3(x+2)(x-2)e^{x^3-12x}$. Vi ser da (f. eks. ved å bruke fortegnsskjema) at $f'(x)$ er negativ for x i $\langle -2, 2\rangle$ og positiv for x i $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$. Altså er $f(x)$ strengt voksende i intervallet $\underline{\underline{\langle -\infty, -2]}}$ og i intervallet $\underline{\underline{[2, \infty\rangle}}$, og strengt avtagende i intervallet $\underline{\underline{[-2, 2]}}$. Altså er $\underline{\underline{x = -2 \text{ et lokalt maksimumspunkt}}}$ og $\underline{\underline{x = 2 \text{ et lokalt minimumspunkt}}}$.

Oppgave 8 Vi bruker kjerneregelen med $u(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}8x - 12 = -0{,}01(x^2 - 80x + 1200) = -0{,}01(x-20)(x-60)$, $g(u) = \ln(u)$, $u'(x) = -0{,}02x + 0{,}8 = -0{,}02(x-40)$, $g'(u) = \frac{1}{u}$. Så $f'(x) = \frac{-0{,}02(x-40)}{-0{,}01(x-20)(x-60)} = \frac{2(x-40)}{(x-20)(x-60)}$. Likningen $f'(x) = 0$ tilsvarer likningen $2(x-40) = 0$ og dermed er $\underline{\underline{x = 40 \text{ eneste stasjonære punkt}}}$ for $f(x)$. Ved å bruke fortegnsskjema ser vi at $f'(x)$ er positiv for $20 < x < 40$ og negativ for $40 < x < 60$. Altså er $f(x)$ strengt voksende i intervallet $\langle 20, 40]$ og strengt avtagende i intervallet $[40, 60\rangle$. Dermed er $\underline{\underline{x = 40}}$ et lokalt (og globalt) maksimumspunkt. For å bestemme funksjonens krumning finner vi $f''(x)$. Vi bruker brøkregelen og får $f''(x) = \frac{-2(x^2-80+2000)}{(x-20)^2(x-60)^2}$. Ved å fullføre kvadratet får vi $x^2 - 80 + 2000 = (x-40)^2 + 400$ som er større enn eller lik 400 for alle x. Altså har vi at $f''(x)$ er negativ i hele intervallet $\langle 20, 60\rangle$ og dermed er $f(x)$ konkav i hele definisjonsområdet. Da kan vi konkludere med at det stasjonære punktet $x = 40$ er et globalt maksimumspunkt og maksimum er $\underline{\underline{f(40) = 2\ln(2)}}$.