Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Løs de bestemte integralene:

a) $\int_0^1 x \, \mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x$ d) $\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x$ e) $\int_0^1 (e^x + e^{-x}) \, \mathrm{d}x$

f) $\int_{-1}^1 x \, \mathrm{d}x$ g) $\int_{-1}^1 x^2 \, \mathrm{d}x$ h) $\int_{-1}^1 x^3 \, \mathrm{d}x$ i) $\int_{-1}^1 e^x \, \mathrm{d}x$ j) $\int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) \, \mathrm{d}x$

Oppgave 2.
Løs de bestemte integralene:

a) $\int_0^1 xe^x \, \mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 x\ln(x^2+1) \, \mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6} \, \mathrm{d}x$ d) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+4} \, \mathrm{d}x$

e) $\int_{-1}^1 xe^x \, \mathrm{d}x$ f) $\int_{-1}^1 x\ln(x^2+1) \, \mathrm{d}x$ g) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+5x+6} \, \mathrm{d}x$ h) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+4} \, \mathrm{d}x$

Oppgave 3.
Løs integralet $\int_1^2 1/x \, \mathrm{d}x$. Estimer deretter arealet under grafen til $y = 1/x$ i intervallet $I = [1,2]$ ved hjelp av en Riemann-sum med n delintervaller:

a) $n = 2$ b) $n = 4$ c) $n = 8$

Oppgave 4.
Regn ut det bestemte integralet $\int_0^2 (x^3 - 3x + 1) \, \mathrm{d}x$, og forklar at svaret kan tolkes som $A_1 - A_2 + A_3$, der A_1, A_2, A_3 er arealet av tre områder R_1, R_2, R_3 i xy-planet begrenset av grafen til $f(x) = x^3 - 3x + 1$ og x-aksen. Vis så disse områdene på en figur. En grov skisse er nok.

Oppgave 5.
La R være området begrenset av grafen til $y = \ln(2 + x)$, linjen $y = 2$, og y-aksen. Tegn inn området R på en figur, og regn ut arealet til R.

Oppgave 6.
La R være området begrenset av grafene til $y = x$ og $y = x^2$. Tegn inn området R på en figur, og regn ut arealet til R.

Oppgave 7.
Løs de (uegentlige) integralene nedenfor. Tolk hvert integral som et areal, og tegn figur.

a) $\int_1^\infty 1/x \, \mathrm{d}x$ b) $\int_1^\infty 1/x^2 \, \mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 -\ln x \, \mathrm{d}x$ d) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ e) $\int_0^\infty \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

Oppgave 8.
Bestem arealet under grafen til $y = 1/x$ i intervallet $I = [1,2]$, og bruk dette til å vise at

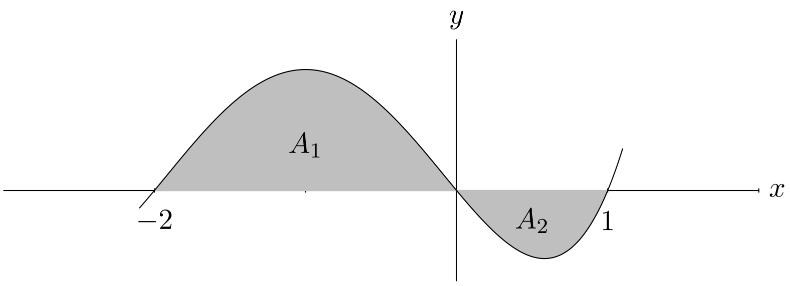
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) = \ln(2)$$

Oppgave 9.
Eksamen MET11807 12/2019
Regn ut disse integralene:

a) **(6p)** $\displaystyle\int 30x\sqrt{x}\;\mathrm{d}x$

b) **(6p)** $\displaystyle\int xe^{-x}\;\mathrm{d}x$

c) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{6-3x}{4-9x^2}\;\mathrm{d}x$



d) **(6p)** Grafen til en funksjon f er vist i figuren ovenfor. Bestem arealet A_1 når det er oppgitt at arealet $A_2 = 22/15$ og at

$$\int_{-2}^{1} f(x)\;\mathrm{d}x = \frac{18}{5}$$

Oppgave 10.
Oppgaver fra læreboken: 5.6.1 - 5.6.5, 5.7.1 - 5.7.2

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

a) $1/2$ b) $1/3$ c) $1/4$ d) $e-1$ e) $e-1/e$

f) 0 g) $2/3$ h) 0 i) $e-1/e$ j) $2(e-1/e)$

Oppgave 2.

a) 1 b) $\ln(2)-1/2$ c) $2\ln(3)-3\ln(2)$ d) $1/6$

e) $2/e$ f) 0 g) $\ln(3)-\ln((2)$ h) $2/3$

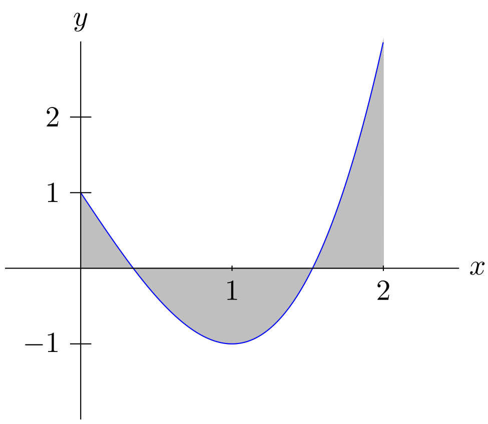
Oppgave 3.
Det bestemte integralet er $\int_1^2 1/x \, dx = \ln(2) \approx 0.693$, og tilnærmingene er gitt ved:

a) $0.5 \cdot 1/1 + 0.5 \cdot 2/3 \approx 0.833$

b) $0.25 \cdot 1/1 + 0.25 \cdot 4/5 + 0.25 \cdot 2/3 + 0.25 \cdot 4/7 \approx 0.760$

c) $0.125 \cdot 1 + 0.125 \cdot 8/9 + 0.125 \cdot 4/5 + 0.125 \cdot 8/11 + 0.125 \cdot 2/3 + 0.125 \cdot 8/13 + 0.125 \cdot 4/7 + 0.125 \cdot 8/15 \approx 0.725$

Oppgave 4.
Det bestemte integralet er $\int_0^2 (x^3 - 3x + 1) \, dx = 0$. Grafene til f er vist nedenfor, og vi ser at områdene R_1 and R_3 ligger over x-aksen mens R_2 ligger under. Derfor er $A_1 - A_2 + A_3 = \int_0^2 (x^3 - 3x + 1) \, dx = 0$.



Oppgave 5.
$e^2 - 6 + \ln(4)$

Oppgave 6.
$1/6$

Oppgave 7.
a) ∞ b) 1 c) 1 d) $2e - 2$ e) $2e$

Oppgave 8.
Arealet er $\ln(2)$, og Riemann-summen for dette arealet med n delintervaller er

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + 1/n} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + (n-1)/n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

Grenseverdien til denne summen når $n \to \infty$ er derfor lik arealet $\ln(2)$.

Oppgave 9.
a) Vi skriver $x\sqrt{x} = x^{3/2}$ som en potens, og bruker potensregelen for derivasjon:

$$\int 30x\sqrt{x} \, dx = \int 30x^{3/2} \, dx = 30\frac{2}{5}x^{5/2} + C = 12x^2\sqrt{x} + C$$

b) Vi bruker delvis integrasjon med $u' = e^{-x}$ og $v = x$, som gir $u = -e^{-x}$ og $v' = 1$, og dermed

$$\int xe^{-x}\ \mathrm{d}x = -e^{-x} \cdot x - \int -e^{-x} \cdot 1\ \mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\ \mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

c) Vi faktoriserer nevner som $4-9x^2 = (2+3x)(2-3x)$, og forenkler integranden (uttrykket som skal integreres) ved delbrøksoppspaltning. Dette gir

$$\frac{6-3x}{4-9x^2} = \frac{A}{2+3x} + \frac{B}{2-3x} \quad \Rightarrow \quad 6-3x = A(2-3x) + B(2+3x)$$

Det vil si $6-3x = (2A+2B) + (3B-3A)x$, eller at $2A+2B = 6$ og $3B-3A = -3$. Dette lineære systemet kan skrives $A+B = 3$ og $B-A = -1$, som gir $2B = 2$ ved addisjon av likningene, eller $B = 1$ og $A = 2$. Integralet blir dermed

$$\int \frac{6-3x}{4-9x^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{2}{2+3x} + \frac{1}{2-3x}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln|2+3x| - \frac{1}{3}\ln|2-3x| + C$$

d) Vi har at deler opp integralet, og uttrykker det ved hjelp av arealene A_1 og A_2. Dette gir

$$\int_{-2}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x = A_1 - A_2$$

siden $f(x) > 0$ i intervallet $(-2{,}0)$ og $f(x) < 0$ i intervallet $(0{,}1)$. Vi løser likningen for A_1, og dette gir

$$A_1 = \int_{-2}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x + A_2 = \frac{18}{5} + \frac{22}{15} = \frac{76}{15} \approx 5.07$$

Oppgave 10.

Fullstendig løsning av oppgaver fra læreboken [E] finnes i oppgaveboken [O].