MET1181 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2019
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing.

R. Lucas

Forelesning 3
Kap 1.4-6: Nåverdier. Rekker. Annuiteter og annuitetslån.

Under står det anbefalte oppgaver fra læreboken [L]. Oppgaveboken [O] innholder løsningsforslag til alle oppgavene i læreboken og noen flere oppgaver. Etterhvert vil det også komme noen anbefalte eksamensoppgaver.

[L] Eivind Eriksen. Matematikk for økonomi og finans.

[O] Eivind Eriksen. Matematikk for økonomi og finans. Oppgaver og løsningsforslag.

[L] 1.5.1-5

[L] 1.6.1-7

Oppgaver for veiledningstimene
mandag 26/8 fra kl 14 i Study Area

Oppgave 1

(a) Billettprisen Oslo-Bergen endres fra 699 til 899 kroner. Finn den relative endringen og vekstfaktoren.

(b) Billettprisen Oslo-Bergen endres fra 899 til 699 kroner. Finn den relative endringen og vekstfaktoren.

(c) Finn produktet av vekstfaktorene i (a) og (b). Tolk svaret som en vekstfaktor.

(d) Anta a og b er to tall, ulike 0. Vis at

$$\left(1+\frac{b-a}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{a-b}{b}\right)=1$$

og bruk dette til å forklare resultatet i (c).

Oppgave 2 Du setter inn 50 000 på konto med 3,6% nominell rente.

(a) Anta at det er årlig kapitalisering.
  (i) Beregn hvor mye det er på kontoen etter 10 år.
  (ii) Finn vekstfaktoren og den relative prosentvise endringen for disse 10 årene.

(b) Anta at det er månedlig kapitalisering.
  (i) Beregn hvor mye det er på kontoen etter 10 år.
  (ii) Finn vekstfaktoren og den relative prosentvise endringen for disse 10 årene.
  (iii) Finn den (årlige) effektive renten.

Oppgave 3

(a) Beregn hvor mye du må sette på konto i dag hvis det skal stå 250 000 på kontoen om 10 år og renten er 3,4%.

(b) Etter 4 år endres renten til 1,9%. Finn balansen etter 10 år.

(c) Forklar hvorfor svaret i (b) er gitt av uttrykket $250\,000\cdot\left(\frac{1{,}019}{1{,}034}\right)^6$.

(d) Beregn hvor mye du måtte satt i banken i tilfellet (b) for å få 250 000 etter 10 år.

(e) Forklar hvorfor svaret i (d) er gitt av uttrykket $\frac{250\,000}{1{,}019^6\cdot 1{,}034^4}$.

Oppgave 4
(a) Finn nåverdien til en utbetaling på 70 millioner kroner om 4 år når den årlige renten er 9%.
Anta 70 millioner kroner utbetales etter 5 år. La r være renten som gir samme nåverdi som i (a).
(b) Tror du r er større eller mindre enn 9%? Tenk igjennom, finn argumenter.
(c) Beregn r.
(d) Forklar hvorfor svaret i (c) kan skrives som $1{,}09^{\frac{4}{5}} - 1$.

Oppgave 5 En investering på 20 millioner skal gi en utbetaling på 9 millioner om 4 år og ytterligere 14 millioner om 7 år.
(a) Anta renten er 12%. Beregn nåverdien av kontantstrømmen.
(b) Tror du renten må økes eller minskes for at kontantstrømmen skal å få nåverdi lik 0? Tenk igjennom, finn argumenter.
(c) Vis at internrenten til kontantstrømmen er 2,44%.
(d) Syns du dette virker som en interessant investering? Begrunn svaret.

Oppgave 6 Et farmasøytisk selskap ønsker å teste ut en ny medisin og deretter selge patentet. Testingen foregår over 5 år og koster 400 millioner i året. Patentet selges deretter umiddelbart.
(a) Anta diskonteringsrenten settes til 12%. Hva må patentet koste for at denne diskonteringsrenten også blir internrenten for kontantstrømmen?
(b) Patentet selges for 3,20 milliarder. Finn internrenten til kontantstrømmen.

Oppgave 7 Vi har kontantstrømmen

År	0	3	5	7	8
Betaling	−30	−15	4	11	48

Anta renten er 9%.
(a) Beregn fremtidsverdien etter 8 år.
(b) Beregn nåverdien.
Anta renten er 13%.
(c) Beregn fremtidsverdien etter 8 år.
(d) Beregn nåverdien.
(e) Vi antar at den årlige renten er r, og at fremtidsverdien til kontantstrømmen etter n år er K_n. Spesielt er da K_0 nåverdien til kontantstrømmen. Forklar hvorfor

$$K_8 = K_0 \cdot (1 + r)^8$$

og sjekk at dette stemmer i (a-b) og (c-d). Forklar hvorfor fortegnet til K_0 er det samme som fortegnet til K_8.

Oppgave 8 Hege og Kåre sparer penger. Hege sparer 5 300/mnd. Kåre sparer 4 800/mnd. Den nominelle renten på sparekontoen er 3,6% med månedlig forentning. Når de begynner har Kåre allerede 200 000 på kontoen som han har fått av pappa fordi han (nesten) ikke har begynt å røke. Hege har ingenting.
(a) Når tar Hege igjen Kåre?
(b) Hva skjer hvis renten er 2,8%?

Oppgave 9
(a) En bedrift har i år kostnader på 63 millioner. Anta kostnadene øker med 2,8% i året. Finn den geometriske rekken som uttrykker de samlede kostnadene over 10 år og beregn denne kostnaden.
(b) Du setter inn 100 kroner i dag og for hvert år i 20 år. Anta at renten er 2% med årlig kapitalisering. Finn den geometriske rekken som uttrykker balansen etter 20 år og beregn balansen.

Oppgave 10 Anta at et fast beløp A (annuiteten) betales hvert år i 25 år med første betaling om et år. Anta renten er 4,2%.
(a) Finn den geometriske rekken som uttrykker nåverdien til denne kontantstrømmen.
(b) Finn den geometriske rekken som uttrykker fremtidsverdien K_{25} til denne kontantstrømmen.

(c) Anta nåverdien er 3 millioner kroner. Bruk (i) til å beregne annuiteten A.

(d) Bruk annuiteten du fant i (c) til å beregne fremtidsverdien K_{25}.

Fasit

Oppgave 1

(a) Relativ endring er $r_1 = \frac{899-699}{699} = 28{,}61\%$. Vekstfaktor er $1 + r_1 = 1{,}2861$.

(b) Relativ endring er $r_2 = -22{,}25\%$. Vekstfaktor: 0,7775.

(c) $(1 + r_1)(1 + r_2) = 1$.

Oppgave 2

(a) (i) 71 214,36 (ii) Vekstfaktor: 1,4243. Relativ endring: 42,43%.

(b) (ii) 71 627,86 (ii) Vekstfaktor: 1,4326. Relativ endring: 43,26% (iii) 3,66%.

Oppgave 3

(a) 178 951,20

(b) 229 013,92

(d) 195 349,70

Oppgave 4

(a) 49,58 millioner kroner

(c) 7,14%

Oppgave 5

(a) −7,95 millioner kroner

Oppgave 6

(a) 2,541 milliarder kroner

(b) $r = 23{,}7\%$ (Hint: Du skal få likningen $(r + 1)^5 - 8r - 1 = 0$. Bruk f. eks. GeoGebra eller Wolfram Alpha til å plotte grafen og les av nullpunktet.)

Oppgave 7

(a) −17,69

(b) −8,88

(c) −41,19

(d) −15,49

Oppgave 9

(a) I millioner kroner: $63 \cdot (1 + 1{,}028 + 1{,}028 + \cdots + 1{,}028^9) = 63 \cdot \frac{1{,}028^{10}-1}{0{,}028} = 715{,}61$

(b) $100 \cdot (1{,}02 + 1{,}02^2 + \cdots + 1{,}02^{20}) = 100 \cdot 1{,}02 \cdot \frac{1{,}02^{20}-1}{0{,}02} = 2\,478{,}33$

Oppgave 10

(a) $A \cdot \left(\frac{1}{1{,}042} + \left(\frac{1}{1{,}042}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{1{,}042}\right)^{25} \right)$

(b) $A \cdot \left(1{,}042^{24} + 1{,}042^{23} + \cdots + 1{,}042 + 1\right)$

(c) $A \cdot 15{,}297012 = 3$ mill gir $A = \frac{3}{15{,}297012}$ mill $= 196\,116{,}73$.

(d) 8 391 009,81