Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Bruk Lagranges metode til å finne kandidater for maksimum og/eller minimum:

a) $\max / \min f(x,y) = 3x - y$ når $x^2 + 4y^2 = 37$
b) $\max / \min f(x,y) = x^2 + 4y^2$ når $3x - y = 37$
c) $\max / \min f(x,y) = xy$ når $x^2 + 4y^2 = 8$
d) $\max / \min f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ når $xy = 6$
e) $\max f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 16$ når $x^2 + y^2 = 16$
f) $\max f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 16$ når $xy = 4$

Oppgave 2.
Finn globalt maksimum/minimum, hvis det eksisterer:

a) $\max / \min f(x,y) = 3x - y$ når $x^2 + 4y^2 = 37$
b) $\max / \min f(x,y) = x^2 + 4y^2$ når $3x - y = 37$
c) $\max / \min f(x,y) = xy$ når $x^2 + 4y^2 = 8$
d) $\max / \min f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ når $xy = 6$
e) $\max f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 16$ når $x^2 + y^2 = 16$
f) $\max f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 16$ når $xy = 4$

Oppgave 3.
Løs Lagrange-problemet: $\max U(x,y) = 0.3 \ln(x-3) + 0.7 \ln(y-2)$ når $12x + 5y = 60$. Finn Lagrange-multiplikatoren λ, og gi en tolkning av denne multiplikatoren.

Oppgave 4.
Hva vil det si at bibetingelsen er degenerert? Kan du gi eksempler på en bibetingelsen $g(x,y) = a$ som har et tillatt punkt med degenerert bibetingelse? Kan du finne en funksjon $f(x,y)$ slik at optimeringsproblemet $\max f(x,y)$ når $g(x,y) = a$ har punktet med degenerert bibetingelse som maksimumspunkt?

Oppgave 5. *Eksamen MET1180 12/2015*
Vi betrakter nivåkurven $g(x,y) = 0$, hvor g er funksjonen $g(x,y) = x^3 + xy + y^2$.

a) Finn alle punkt på nivåkurven med $x = -2$, og bestem tangenten i hvert av disse punktene.
b) Finn maksimumsverdien til $f(x,y) = x$ under bibetingelsen $x^3 + xy + y^2 = 0$.

Oppgave 6. *Eksamen MET1180 06/2016*
Vi betrakter Lagrange-problemet

$$\max / \min f(x,y) = x + 2y - \sqrt{36 - x^2 - 4y^2} \quad \text{når} \quad x^2 + 4y^2 = 36$$

a) Finn punktene på nivåkurven $x^2 + 4y^2 = 36$ der tangenten har stigningstall $y' = 1/2$.
b) Tegn en skisse av $D = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 = 36\}$. Er D begrenset? Hva slags kurve er dette?
c) Løs Lagrange-problemet og finn maksimums- og minimumsverdien.
d) Løs det nye optimeringsproblemet vi får når vi endrer bibetingelsen til $x^2 + 4y^2 \leq 36$.

Oppgave 7. *Vanskelig!*
Løs Lagrangeproblemet $\max f(x,y) = x + y$ når $x^3 - 3xy + y^3 = 0$. Du kan gå ut i fra at problemet har et maksimum.

Oppgave 8.
Oppgaver fra læreboken: 7.6.4 - 7.6.6
Oppgaver fra oppgaveboken: 9.32 - 9.34

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

a) $(x,y;\lambda) = (6,-1/2;1/4),\ (-6,1/2;-1/4)$

b) $(x,y;\lambda) = (12,-1;8)$

c) $(x,y;\lambda) = (2,1;1/4),\ (-2,-1;1/4),\ (2,-1;-1/4),\ (-2,1;-1/4)$

d) $(x,y;\lambda) = (3,2;12),\ (-3,-2;12)$

e) $(x,y;\lambda) = (\pm 2\sqrt{2},\pm 2\sqrt{2};8), (\pm 4,0;0), (0,\pm 4;0)$

f) $(x,y;\lambda) = (2,2;-2), (-2,-2;-2)$

Oppgave 2.

a) $f_{\max} = 37/2,\ f_{\min} = -37/2$

b) $f_{\min} = 148$ (har ikke maksimum)

c) $f_{\max} = 2,\ f_{\min} = -2$

d) $f_{\min} = 72$ (har ikke maksimum)

e) $f_{\max} = 64,\ f_{\min} = 0$

f) $f_{\max} = 24$ (har ikke minimum)

Oppgave 3.

Vi finner maksimumspunkt $(x,y) = (67/20, 99/25)$, maksimumsverdi $f_{\max} = 1.7\ln(1.4) - 0.6\ln(2)$ med $\lambda = 1/14$. Det betyr at den optimale nytten vil øke med ca $1/14$ om bibetingelsen endres til $12x + 5y = 61$.

Oppgave 7.

$f_{\max} = 3$