Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Lagrange-problemet $\max f(x,y)$ når $g(x,y) = 4$ har maksimumsverdi $f(1,3) = 12$ i det ordinære kandidatpunktet $(x,y;\lambda) = (1,3;2)$. Hva er tolkningen av $\lambda = 2$? Bruk dette til å estimere maksimums-verdien til Lagrange-problemet $\max f(x,y)$ når $g(x,y) = 3$.

Oppgave 2.
Vi ser på funksjonen $f(x,y) = x^3y^2 + x^2 - 2x$.

a) Finn alle stasjonære punkter og klassifiser disse.

b) Har f globale maksimuma eller minima?

Oppgave 3.
Vi ser på funksjonen $f(x,y) = x^3y^2 + x^2y - xy + 1$ med definisjonsområde $D = \{(x,y) : -1 \leq x,y \leq 1\}$.

a) Lag en skisse av D og beskriv randpunktene.

b) Finn de indre stasjonære punkt og klassifiser disse.

c) Finn $f_{\max}$ og $f_{\min}$ dersom de eksisterer.

Oppgave 4.
Vi ser på følgende Lagrange-problem: $\max / \min \; f(x,y) = xy \quad \text{når} \quad x^2 + y^2 = 4$

a) Løs Lagrangebetingelsene og finn kandidatpunkter.

b) Finnes punkter med degenerert bibetingelse?

c) Løs optimeringsproblemet.

Oppgave 5.
Vi ser på kurven C med likning $y(x^2 + y^2) = 2(x^2 - y^2)$.

a) Finn alle punktene på kurven C med $y = -1$.

b) Finn tangenten til C i hvert punkt med $y = -1$.

c) Løs optimeringsproblemet: $\max / \min \; f(x,y) = y \quad \text{når} \quad y(x^2 + y^2) = 2(x^2 - y^2)$

Oppgave 6.
Løs optimeringsproblemet: $\max / \min \; f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3 \quad \text{når} \quad xy = 1$

Oppgave 7. *Eksamen MET1180 12/2018*
Vi ser på funksjonen definert ved $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$.

a) Finn alle stasjonære punkter for f.

b) Regn ut Hesse-matrisen til f, og bruk den til å klassifisere de stasjonære punktene.

c) Avgjør om f har globale maksimums- eller minimumverdier.

d) Løs Lagrange-problemet: $\max f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y^2$ når $x^2 + 2y^2 = 5$

Oppgave 8. *Eksamen MET1180 12/2017*
Vi betrakter funksjonen $f(x,y) = x^2y^2 + xy + x - y$.

a) Regn ut de første ordens partiellderiverte og Hessematrisen til f.

b) Vis at nivåkurven $f(x,y) = 2$ skjærer linjen $y = x$ i to punkter (a,a) og (b,b).

c) Finn tangenten til nivåkurven $f(x,y) = 2$ i punktene (a,a) og (b,b).

d) Finn eventuelle stasjonære punkter for f, og klassifisér disse som lokale maksima, lokale minima eller sadelpunkt.

Oppgave 9. *Eksamen MET1180 12/2017*
Vi betrakter Lagrange-problemet: $\min f(x,y) = xy \quad \text{når} \quad x^2 + 4y^2 = 4$.

a) Lag en skisse av kurven gitt ved $x^2 + 4y^2 = 4$, og avgjør om dette er en begrenset mengde.

b) Skriv ned Lagrange-betingelsene, og finn alle $(x,y;\lambda)$ som oppfyller disse betingelsene.

c) Løs Lagrange-problemet.

d) Gi en tolkning av Lagrangemultiplikatoren i et Lagrange-problem, og bruk denne tolkningen til å estimere minimumsverdien til det nye Lagrange-problemet: $\min f(x,y) = xy \quad \text{når} \quad x^2 + 4y^2 = 5$

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
$f_{\max} \approx 12 + (-1) \cdot 2 = 10$

Oppgave 2.

a) $(1,0)$ lokalt minimum

b) Nei

Oppgave 3.

a) Randpunktene er sidekantene i kvadratet

b) $(0,0)$ sadelpunkt

c) $f_{\max} = 2$, $f_{\min} = -2$

Oppgave 4.

a) $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}; 1/2)$, $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}; -1/2)$

b) Nei

c) $f_{\max} = 2$, $f_{\min} = -2$

Oppgave 5.

a) $(\pm\sqrt{1/3}, -1)$

b) $y = 2 \mp 3\sqrt{3}x$

c) $f_{\min} = -2$, ingen maksimumsverdi

Oppgave 6.
Hverken maksimum eller minimum finnes.