MET1181 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2019
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing.

R. Lucas

Forelesning 4
Kap 1.7-8: Uendelige rekker og grenseverdier. Eulers tall og kontinuerlig forrentning.

Under står det anbefalte oppgaver fra læreboken [L]. Oppgaveboken [O] innholder løsningsforslag til alle oppgavene i læreboken og noen flere oppgaver. Etterhvert vil det også komme noen anbefalte eksamensoppgaver.

[L] Eivind Eriksen. Matematikk for økonomi og finans.
[O] Eivind Eriksen. Matematikk for økonomi og finans. Oppgaver og løsningsforslag.

[L] 1.7.1-5
[L] 1.8.1-7

Oppgaver for veiledningstimene
mandag 2/9 fra kl 14 i Study Area

Oppgave 1 Beregn summen av rekkene.

(a) $1 + 1{,}04 + 1{,}04^2 + 1{,}04^3 + \cdots + 1{,}04^{10}$.
(b) $1 + 1{,}04 + 1{,}04^2 + 1{,}04^3 + \cdots + 1{,}04^{20}$.
(c) $1 + 1{,}04 + 1{,}04^2 + 1{,}04^3 + \cdots + 1{,}04^{n}$.
(d) $30\,000 \cdot 1{,}04^{20} + 30\,000 \cdot 1{,}04^{19} + 30\,000 \cdot 1{,}04^{18} + \cdots + 30\,000 \cdot 1{,}04^{2} + 30\,000 \cdot 1{,}04$.
(e) Beskriv en finanssituasjon hvor summen i (d) er aktuell.
(f) $1 + \frac{1}{1{,}04} + \frac{1}{1{,}04^2} + \frac{1}{1{,}04^3} + \cdots + \frac{1}{1{,}04^{20}}$.
(g) Forklar hvorfor $1{,}04^{20}$ multiplisert med summen (f) gir summen (b).
(h) $1 + \frac{1}{1{,}04} + \frac{1}{1{,}04^2} + \frac{1}{1{,}04^3} + \cdots + \frac{1}{1{,}04^{n}}$.
(i) $\frac{30\,000}{1{,}04} + \frac{30\,000}{1{,}04^2} + \frac{30\,000}{1{,}04^3} + \cdots + \frac{30\,000}{1{,}04^{20}}$.
(j) Beskriv en finanssituasjon hvor summen (i) er aktuell.

Oppgave 2 Anta at du skal få utbetalt 500 000 hvert år i n år med første utbetaling om et år. Anta renten er på 3,5%.

(a) Skriv opp den geometriske rekken som gir nåverdiene av kontantstrømmen.
(b) Bruk den geometrisk rekken til å beregne nåverdien av kontantstrømmen for $n = 10$, $n = 20$, $n = 40$, $n = 80$ og $n = 1000$.
(c) Beregn nåverdien av kontantstrømmen hvis den fortsetter i all fremtid.

Oppgave 3 Anta at den nominell årlige renten er 4,8%.

(a) Anta årlig forrentning (kapitalisering). Finn den årlige vekstfaktoren. Beregn den 10-årlige vekstfaktoren og den 10-årlige effektive renten.
(b) Anta kvartalsvis forrentning. Beregn den årlige vekstfaktoren og den effektive renten. Beregn den 10-årlige vekstfaktoren og den 10-årlige effektive renten.
(c) Anta månedlig forrentning. Beregn den årlige vekstfaktoren og den effektive renten. Beregn den 10-årlige vekstfaktoren og den 10-årlige effektive renten.
(d) Anta daglig forrentning. Beregn den årlige vekstfaktoren og den effektive renten. Beregn den 10-årlige vekstfaktoren og den 10-årlige effektive renten.

(e) Anta kontinuerlig forrentning. Beregn den årlige vekstfaktoren og den effektive renten. Beregn den 10-årlige vekstfaktoren og den 10-årlige effektive renten.

Oppgave 4 Du setter inn 30 000 på konto med 2,9% nominell rente.

(a) Anta at det er årlig kapitalisering.
  (i) Beregn hvor mye det er på kontoen etter 10 år.
  (ii) Finn vekstfaktoren og den relative prosentvise endringen for disse 10 årene.

(b) Anta at det er kontinuerlig kapitalisering.
  (i) Beregn hvor mye det er på kontoen etter 10 år.
  (ii) Finn vekstfaktoren og den relative prosentvise endringen for disse 10 årene.
  (iii) Finn den (årlige) effektive renten.

Oppgave 5 Du vurderer å investere 2 millioner kroner i et verdipapir for å kunne selge det for 5 millioner om 20 år.

(a) Beregn internrenten hvis det er årlig kapitalisering.
(b) Beregn internrenten hvis det er kvartalsvis kapitalisering.
(c) Beregn internrenten hvis det er månedlig kapitalisering.
(d) Beregn internrenten hvis det er kontinuerlig kapitalisering. (Hint: Her kan du prøve deg frem med forskjellige renter.)

Oppgave 6

(a) Beregn nåverdien til en utbetaling på 30 millioner om 5 år med 13% årlig rente og kontinuerlig forrentning.
(b) Beregn nåverdien til kontantstrømmen

År	0	1	5	6	7
Betaling	−70	−20	30	55	80

med 13% årlig rente og kontinuerlig forrentning.

(c) Anta kontantstrømmen beskriver en investering med avkastning. Avgjør om investeringen er gunstig.
(d) Vis at internrenten med kontinuerlig forrentning er omtrent 10%. Beskriv hva dette betyr for investeringen.
(e) Beregn hva betalingen i år 0 må være for at internrenten skal være 13% med kontinuerlig forrentning og alt annet som i (b).
(f) Finn fremtidsverdien etter 7 år (sluttverdien) for betalingsstrømmen i (b) og i (e).

Oppgave 7 Hege vurderer et boliglån med 25 årlige terminer. Hun regner med at hun kan betale 120 000 pr år. Første termin er om et år.

(a) Anta renten er 2,0% og at det er årlig forrentning. Finn den geometriske rekken som gir nåverdien av betalingsstrømmen og bruk denne til å beregne hvor mye Hege kan låne.
(b) Anta renten er 2,0% og at det er kontinuerlig forrentning. Finn den geometriske rekken som gir nåverdien av betalingsstrømmen og bruk denne til å beregne hvor mye Hege kan låne.
(c) Vurdere svarene i (a) og (b) mot hverandre.

Oppgave 8 Vi har en konto med kontinuerlig kapitalisering.

(a) Beregn hvor mye du må sette inn i dag hvis det skal stå 250 000 på kontoen om 10 år og renten er 3,4% pr år.
(b) Etter 4 år endres renten til 1,9%. Finn balansen etter 10 år.
(c) Forklar hvorfor svaret i (b) er gitt av uttrykket $\frac{250\,000}{e^{6(0{,}034-0.019)}}$.
(d) Beregn hvor mye du måtte satt i banken i tilfellet (b) for å få 250 000 etter 10 år.
(e) Forklar hvorfor svaret i (d) er gitt av uttrykket $\frac{250\,000}{e^{(4\cdot 0{,}034+6\cdot 0{,}019)}}$.
(f) Anta nå at renten de to første årene er 3,4%, de tre neste 1,9%, år 6 og 7 er den 3,4% og de tre siste er renten 1,9%. Finn hvor mye du måtte ha satt inn for å ha 250 000 etter 10 år.

Oppgave 9 Anta at du skal få utbetalt 300 000 hvert år i n år med første utbetaling om et år. Anta renten er på 3,5% med kontinuerlig forrentning.

(a) Skriv opp den geometriske rekken som gir nåverdiene av kontantstrømmen.

(b) Bruk den geometrisk rekken til å beregne nåverdien av kontantstrømmen for $n = 10$, $n = 20$, $n = 40$, $n = 80$ og $n = 1000$.
(c) Bruk den geometrisk rekken til å beregne nåverdien av kontantstrømmen hvis den fortsetter i all fremtid.

Oppgave 10 Anta at et fast beløp $A = 40\,000$ (annuiteten) betales hvert år i n år med første betaling om et år. Anta den nominelle renten er r med kontinuerlig forrentning.
(a) Finn den geometriske rekken som uttrykker nåverdien til denne kontantstrømmen hvis $n = 25$ og $r = 2{,}6\%$. Bruk denne rekken til å beregne nåverdien.
(b) Anta annuiteten betales for alltid. Finn den uendelige geometriske rekken som uttrykker nåverdien til denne kontantstrømmen hvis $r = 2{,}6\%$. Bruk denne rekken til å beregne nåverdien.
(c) Anta annuiteten betales for alltid. Finn renten r slik at nåverdien (K_0) blir 3 millioner kroner. (Hint: Her kan du prøve deg frem med forskjellige renter.)
(d) Forklar hvorfor (c) gir likningen

$$e^r = \frac{K_0 + A}{K_0} = \frac{3\,000\,000 + 40\,000}{3\,000\,000} = 1{,}0133$$

Fasit

Oppgave 1
(a) $\frac{1{,}04^{11}-1}{0{,}04} = 13{,}49$.
(b) $\frac{1{,}04^{21}-1}{0{,}04} = 31{,}97$.
(c) $\frac{1{,}04^{n+1}-1}{0{,}04}$.
(d) $30\,000 \cdot 1{,}04 \cdot \frac{1{,}04^{20}-1}{0{,}04} = 929\,076{,}05$.
(e) Innbetaling av 30 000 hvert år i 20 år på en konto med 4% rente med årlig kapitalisering gir denne summen som sluttverdi (fremtidsverdi etter 20 år).
(f) Vi leser den geometriske rekken baklengs: $\frac{1}{1{,}04^{20}} \cdot \frac{1{,}04^{21}-1}{0.04} = 14{,}59$.
(g) $(1 + \frac{1}{1{,}04} + \frac{1}{1{,}04^2} + \frac{1}{1{,}04^3} + \cdots + \frac{1}{1{,}04^{20}}) \cdot 1{,}04^{20} = 1{,}04^{20} + 1{,}04^{19} + \cdots + 1{,}04^2 + 1{,}04 + 1$.
(h) $\frac{1}{1{,}04^n} \cdot \frac{1{,}04^{n+1}-1}{0.04}$.
(i) $\frac{30\,000}{1{,}04^{20}} \cdot \frac{1{,}04^{20}-1}{0.04} = 407\,709{,}79$.
(j) Nåverdien (lånebeøpet) til et annuitetslån med annuitet 30 000, 4% rente med årlig forrentning og 20 års løpetid.

Oppgave 2
(a) $\frac{500\,000}{1{,}035} + \frac{500\,000}{1{,}035^2} + \frac{500\,000}{1{,}035^3} + \cdots + \frac{500\,000}{1{,}035^n}$.
(b) $n = 10 : \frac{500\,000}{1{,}035^{10}} \cdot \frac{1{,}035^{10}-1}{0{,}035} = 4\,158\,302{,}66$, $n = 20 : \frac{500\,000}{1{,}035^{20}} \cdot \frac{1{,}035^{20}-1}{0{,}035} = 7\,106\,201{,}65$, $n = 40 : \frac{500\,000}{1{,}035^{40}} \cdot \frac{1{,}035^{40}-1}{0{,}035} = 10\,677\,536{,}17$, $n = 80 : \frac{500\,000}{1{,}035^{80}} \cdot \frac{1{,}035^{80}-1}{0{,}035} = 13\,374\,387{,}83$ og $n = 1000 : \frac{500\,000}{1{,}035^{1000}} \cdot \frac{1{,}035^{1000}-1}{0{,}035} = 14\,285\,714{,}29$.
(c) $\frac{500\,000}{1{,}035^n} \cdot \frac{1{,}035^n-1}{0{,}035} = 500\,000 \cdot \frac{1-\frac{1}{1{,}035^n}}{0{,}035}$ som nærmer seg mer og mer $500\,000 \cdot \frac{1}{0{,}035} = 14\,285\,714{,}29$ når n blir større og større («går» mot ∞).

Oppgave 3
(a) Årlig vekstfaktor: 1,048, 10-årlig vekstfaktor: $1{,}048^{10} = 1{,}5981$, 10-årlig effektiv rente: 59,81%.
(b) Årlig vekstfaktor: 1,0489, 10-årlig vekstfaktor: 1,6115, 10-årlig effektiv rente: 61,15%.
(c) Årlig vekstfaktor: 1,0491, 10-årlig vekstfaktor: 1,6145, 10-årlig effektiv rente: 61,45%.
(d) Årlig vekstfaktor: 1,0492, 10-årlig vekstfaktor: 1,6160, 10-årlig effektiv rente: 61,60%.
(e) Årlig vekstfaktor: 1,0492, 10-årlig vekstfaktor: 1,6161, 10-årlig effektiv rente: 61,61%.

Oppgave 4

(a) (i) 39 927,77

(ii) Vekstfaktoren: 1,3309, relative prosentvis endring: 33,09%

(b) (i) 40 092,82

(ii) Vekstfaktoren: 1,3364, relative prosentvis endring: 33,64%

(iii) 2,94%

Oppgave 5

(a) $2{,}5^{\frac{1}{20}} - 1 = 4{,}69\%$

(b) 4,61%

(c) 4,59%

(d) Får likningen $e^r = 2{,}5^{\frac{1}{20}} = 1{,}0469$ og prøver: $r = 4{,}58\%$.

Oppgave 6

(a) 15,66 millioner.

(b) −14,49 millioner.

(c) Man får ikke 13% rente på denne investeringen.

(d) Nåverdien 0,01 millioner er omtrent lik 0.

(e) 55,51 millioner.

(f) (b): −35,99 millioner, (e): 0,0 millioner.

Oppgave 7

(a) Nåverdi: $120\,000 \cdot \frac{1}{1{,}02} + 120\,000 \cdot \frac{1}{1{,}02^2} + 120\,000 \cdot \frac{1}{1{,}02^3} + \cdots + 120\,000 \cdot \frac{1}{1{,}02^{24}} + 120\,000 \cdot \frac{1}{1{,}02^{25}}$.
Lånebeløp: 2 342 814,78

(b) Nåverdi:
$120\,000 \cdot \frac{1}{e^{0{,}02}} + 120\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}02})^2} + 120\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}02})^3} + \cdots + 120\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}02})^{24}} + 120\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}02})^{25}}$.
Lånebeløp: $120\,000 \cdot \frac{1}{e^{0{,}02\cdot 25}} \cdot \frac{e^{0{,}02\cdot 25}-1}{e^{0{,}02}-1} = 2\,337\,286{,}57$

Oppgave 8

(a) 177 942,58

(b) 228 482,80

(d) 194 700,20

(f) 194 700,20

Oppgave 9

(a)

$$300\,000 \cdot \frac{1}{e^{0{,}035}} + 300\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}035})^2} + \cdots + 300\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}035})^{n-1}} + 300\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}035})^n}$$

(b) Summen av den geometriske rekken: $300\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}035})^n} \cdot \frac{(e^{0{,}035})^n-1}{e^{0{,}035}-1}$. For $n = 10$: 2 487 206,55 for $n = 20$: 4 239 911,38 for $n = 40$: 6 345 389,07 for $n = 80$: 7 910 142,75 for $n = 1000$: 8 422 303,55.

(c) $300\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}035})^n} \cdot \frac{(e^{0{,}035})^n-1}{e^{0{,}035}-1} = 300\,000 \cdot \frac{1-(e^{0{,}035})^{-n}}{e^{0{,}035}-1}$ nærmer seg mer og mer
$300\,000 \cdot \frac{1}{e^{0{,}035}-1} = 8\,422\,303{,}55$ når n blir større og større.

Oppgave 10

(a)

$$\begin{aligned} &40\,000 \cdot \frac{1}{e^{0{,}026}} + 40\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}026})^2} + \cdots + 40\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}026})^{24}} + 40\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}026})^{25}} \\ &= 40\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}026})^{25}} \cdot \frac{(e^{0{,}026})^{25}-1}{e^{0{,}026}-1} = 40\,000 \cdot \frac{1}{e^{0{,}026\cdot 25}} \cdot \frac{e^{0{,}026\cdot 25}-1}{e^{0{,}026}-1} = 725\,796{,}53 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} &40\,000 \cdot \frac{1}{e^{0{,}026}} + 40\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}026})^2} + \cdots + 40\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0{,}026})^n} + \ldots \\ &= 40\,000 \cdot \frac{1}{e^{0{,}026}-1} = 1\,518\,548{,}20 \end{aligned}$$

(c) Får likningen $e^r = 1{,}0133$ som gir $r = 1{,}32\%$.