MET1181, 10. forelesning, 8. okt. 2020, Runar Ile

Plan

1. Omvendte funksjoner
2. Eksponentialfunksjoner
3. Logaritmer

---

1. Omvendte funksjoner

- uttrykk
- funksjonsverditabellen
- graf
- situasjoner (empiriske funksjoner)

Eks $f(x) = (x-3)^2$

med definisjonsområde

$D_f = [3, \rightarrow\rangle$

(så $x \geq 3$)

x	3	4	5	6	7	$g(x)$
$f(x)$	0	1	4	9	16	x

← den omvendte funksjonen til $f(x)$.

så $g(0) = 3$, $g(1) = 4$, $g(4) = 5$, ...

$f(\overline{g(0)}) = f(3) = 0$ $g(\overline{f(3)}) = g(0) = 3$

$f(\overline{g(1)}) = f(4) = 1$ og $g(\overline{f(4)}) = g(1) = 4$

$f(\overline{g(4)}) = f(5) = 4$ $g(\overline{f(5)}) = g(4) = 5$

Definisjon $f(x)$ med definisjonsmengde D_f og

$g(x)$ ——— " ——— D_g

er omvendte funksjoner hvis

$f(g(x)) = x$ for alle x i D_g og $g(f(x)) = x$ for alle x i D_f

Dessuten: Definisjonsmengden til $g(x)$ er verdimengden til $f(x)$, dvs $D_g = V_f$ og $V_g = D_f$.

Hvordan finne uttrykket for den omvendte funksjonen?

① Løs likningen $y = f(x)$ for x.

② Bytter variablene x og y.

③ Setter $D_g = V_f$ og finner V_f.

Eks $f(x) = (x-3)^2$ med $D_f = [3, \rightarrow\rangle$

① Vi løser likningen $y = (x-3)^2$ for x.

– tar kvadratroten på begge sider

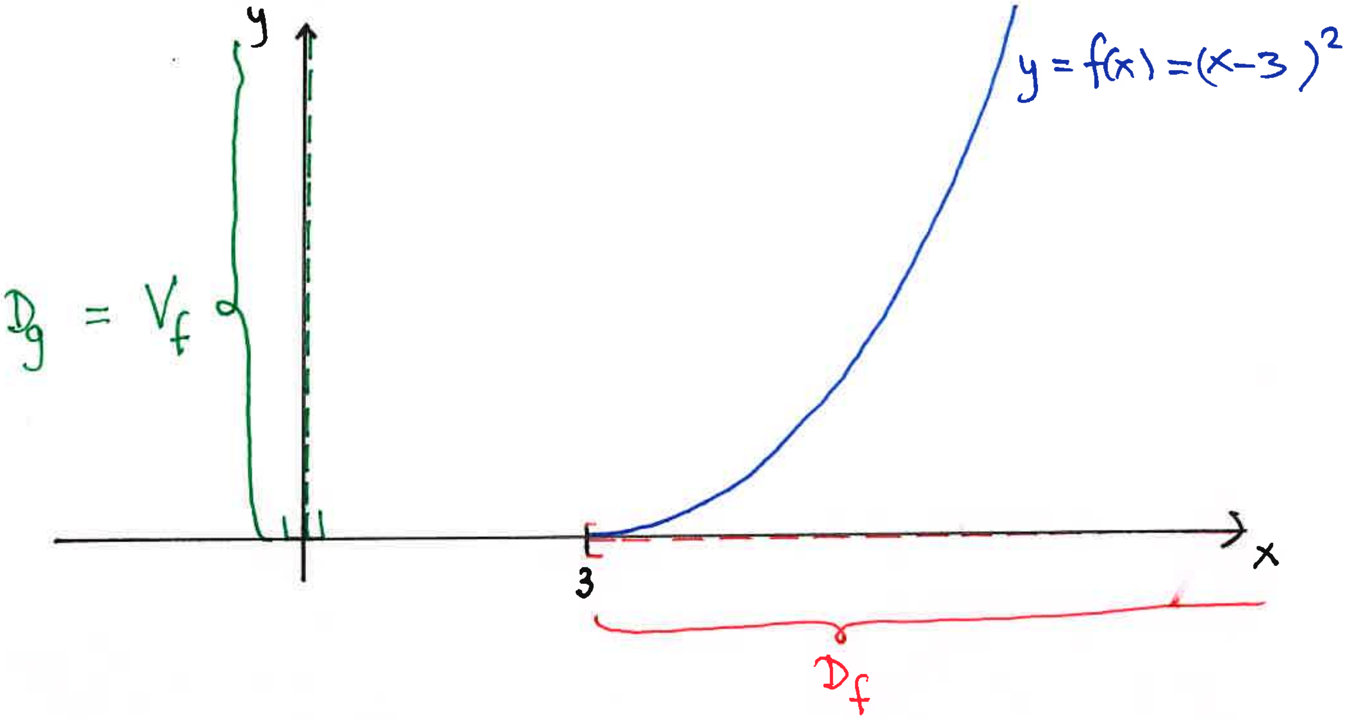
$$\sqrt{y} = |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{hvis } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{hvis } x \leq 3 \end{cases}$$

Så $\sqrt{y} = x - 3$ fordi $x \in D_f = [3, \rightarrow\rangle$

dvs $x = 3 + \sqrt{y}$

② Bytter variabler: $y = g(x) = 3 + \sqrt{x}$

③ $D_g = V_f = [0, \rightarrow\rangle$ fordi $f(x) = (x-3)^2 = y$ har en løsning for $x \geq 3$ for alle verdier $y \geq 0$

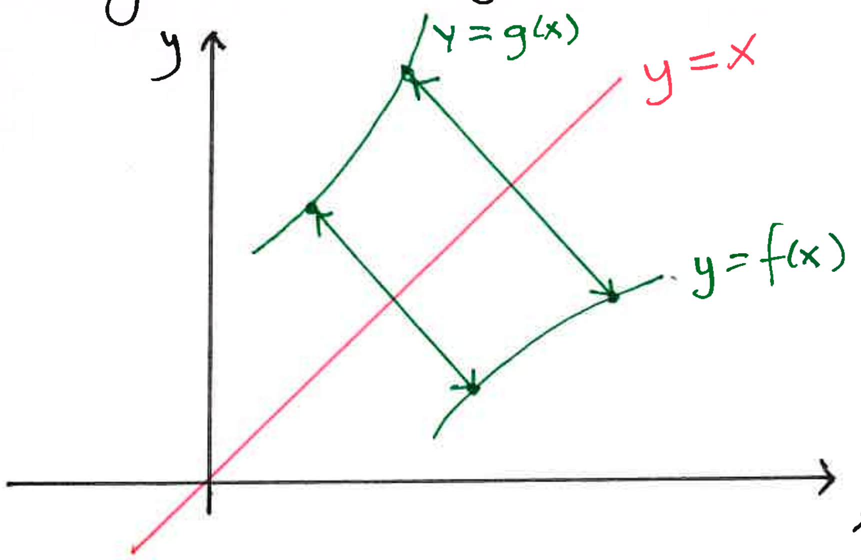


Merk $f(g(x)) = (g(x)-3)^2 = ((\cancel{3}+\sqrt{x})-\cancel{3})^2 = x$

og $g(f(x)) = 3 + \sqrt{f(x)} = 3+\sqrt{(x-3)^2} = 3+(x-3) = x$

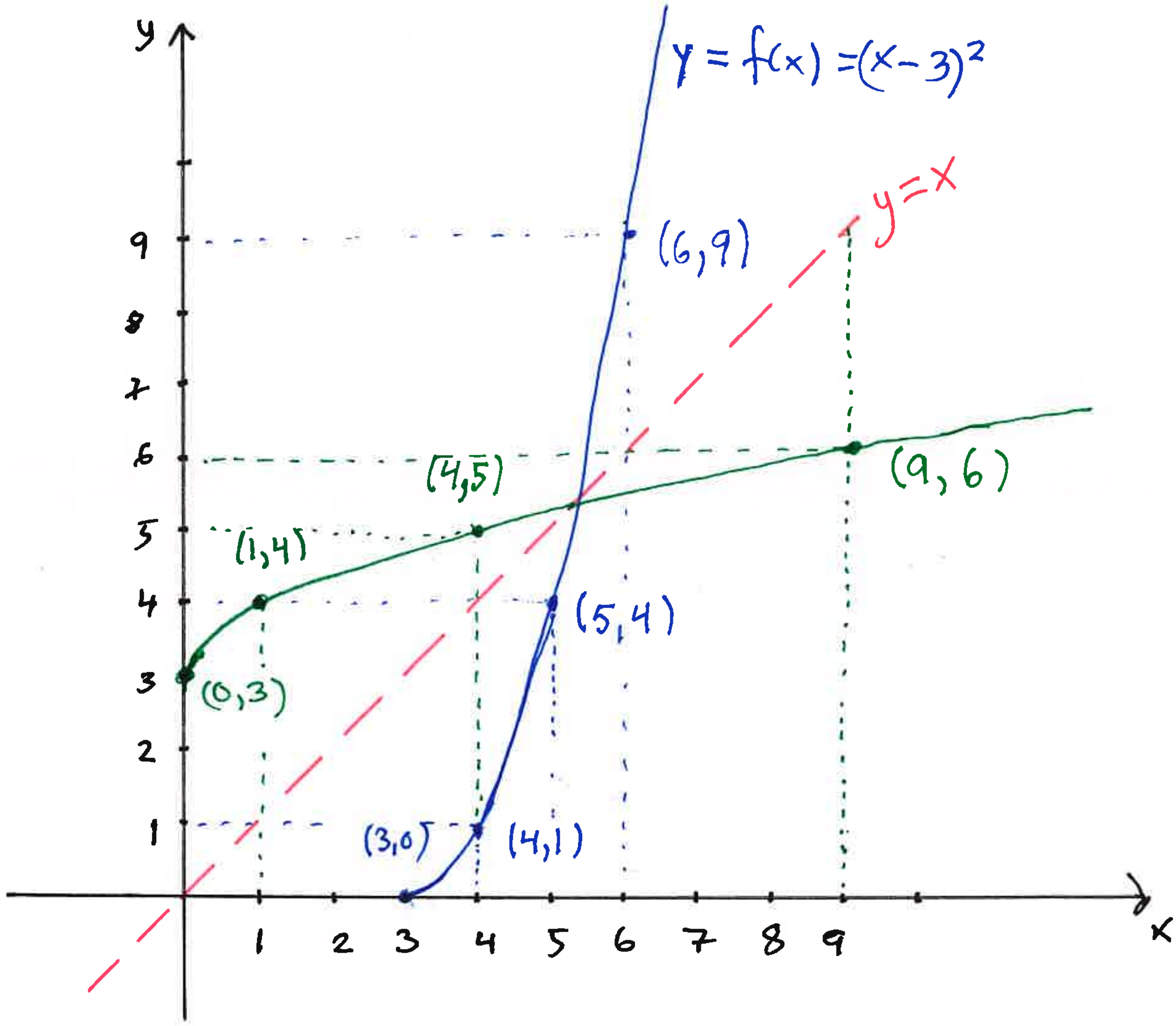
Grafen til den omvendte funksjonen

– er speilbildet av grafen til $f(x)$ om „diagonalen" $y = x$

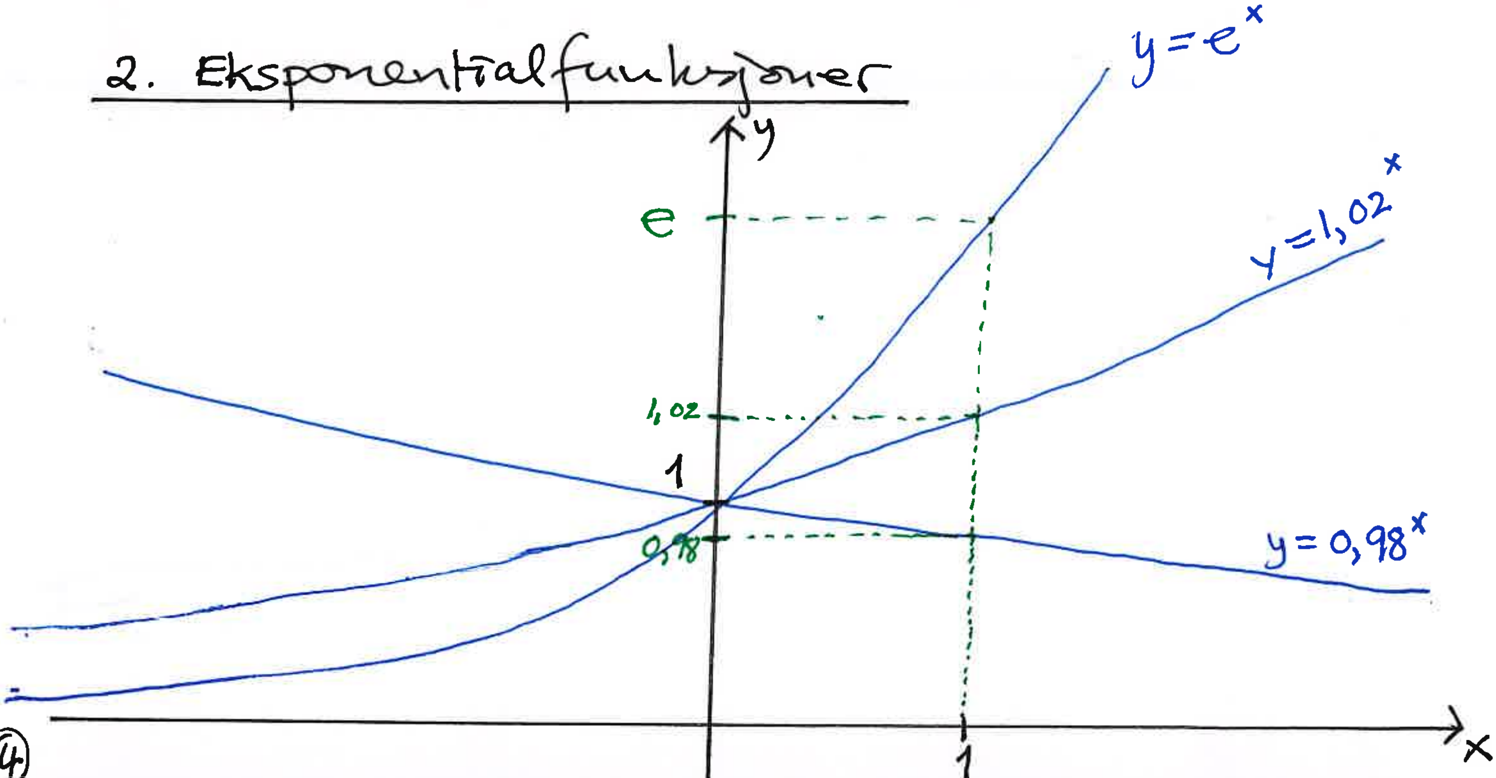


Eks $f(x) = (x-3)^2$ med $D_f = [3, \rightarrow \rangle$

x	3	4	5	6	7	$g(x)$
$f(x)$	0	1	4	9	16	x



2. Eksponentialfunksjoner



$\underline{a>1}$ $f(x) = a^x$ er strengt voksende

og $f(x) = a^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0^+$

(fordi $a^{-1000} = \frac{1}{a^{1000}}$ er veldig nær 0)

$\underline{0<a<1}$ $f(x) = a^x$ er strengt avtagende

og $f(x) = a^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^+$

<u>Merk</u>: a er alltid et positivt tall!

I begge tilfellene er D_f = alle tall på tallinjen

og $V_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$

<u>Potensregler</u> Hvis $f(x) = a^x$

$$f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x+y)$$

og $$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a^x} = a^{-x} = f(-x).$$

<u>3. Logaritmer</u>

Antar at $a > 0$ og $a \neq 1$

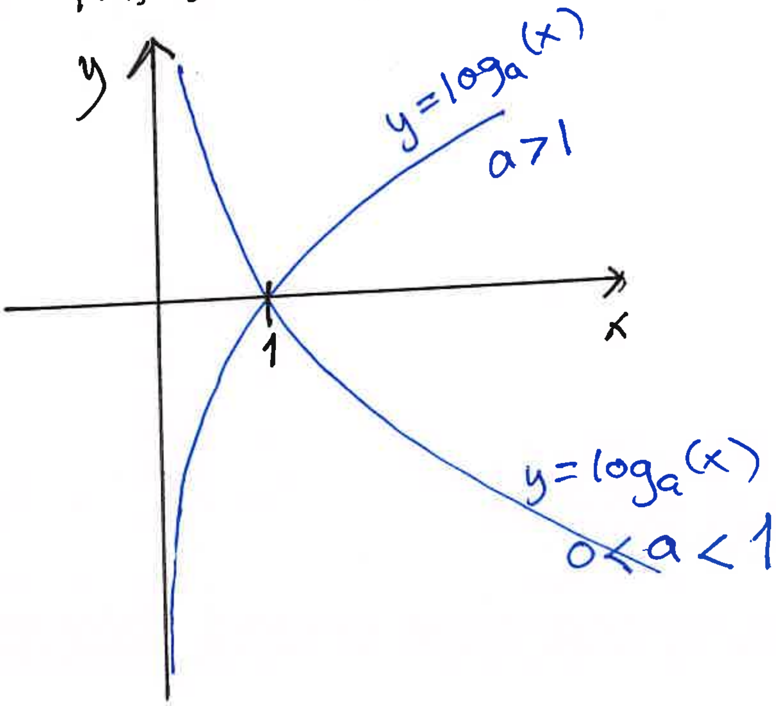
Da er $g(x) = \log_a(x)$ den omvendte funksjonen til $f(x) = a^x$ og

$D_g = V_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ (a er grunntallet til logaritmen)

<u>Eks</u> $a = 2$, $\log_2(10)$ = tallet som 2 må opphøyes i for å gi 10

og fordi $2^{3,322} \approx 10$ er $\log_2(10) \approx 3,322$

så $g(x) = \log_2(x)$ er den omvendte funksjonen til $f(x) = 2^x$.



<u>Regnereglene</u>

① $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

② $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

③ $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$

<u>Definisjon</u> $\ln(x) = \log_e(x)$ e = Eulers tall

– kalles den <u>naturlige</u> logaritmen.

$\ln(x)$ er den omvendte funksjonen til e^x.