MET1181, 12. forelesning, 26. okt. 2020, Runar Ile

Plan Oppgaver fra fagprøven.

1. Finansmatematikk. Oppg 1 og 10
2. Ellipser. Oppg 7
3. Omvendte funksjoner. Oppg 9b.

1. Finansmatematikk

Oppg 1a

$$\frac{10\,000}{1{,}01^{36}} + \frac{10\,000}{1{,}01^{37}} + \cdots + \frac{10\,000}{1{,}01^{215}}$$

$\cdot 1{,}01$ $\cdot \frac{1}{1{,}01}$

Geometrisk rekke „baklengs": $a_1 = \dfrac{10\,000}{1{,}01^{215}}$

$$k = 1{,}01$$

$$\text{ant. ledd } n = 215 - 35 = 180$$

Formelen gir summen: $a_1 \cdot \dfrac{k^n - 1}{k - 1}$

$$= \frac{10\,000}{1{,}01^{215}} \cdot \frac{1{,}01^{180} - 1}{0{,}01}$$

$$= \underline{\underline{588\,179{,}46}}$$

Summen gir nåverdien til en regulær kontantstrøm hvor:

i) 10 000 betales hver måned i 15 år
$\left(\frac{180}{12} = 15\right)$

ii) Første betaling er om 3 år
$\left(\frac{36}{12} = 3\right)$

iii) 12% nominell rente, månedlig forrentning.

1b) $$\frac{10\,000}{e^{0,36}} + \frac{10\,000}{e^{0,37}} + \cdots + \frac{10000}{e^{2,15}} \quad (*)$$

Fordi $e^{0,36} = (e^{0,01})^{36}$, $e^{0,37} = (e^{0,01})^{37}$, osv.

gir summen (*) nåverdien til en regulær kontantstrøm med (i) og (ii) som i (a)

men med

(iii′) 12 % nominell rente og kontinuerlig forrentning (fordi da er vekstfaktoren for 1 måned $(e^{0,12})^{\frac{1}{12}} = e^{0,01}$).

Oppg 10

År	m	n
Bet	-A	B

A, B, m, n ≥ 0

NB: Kontinuerlig kapitalisering.

Setter r = internrenten

a i)

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 3 \\ \hline -10 & & 18 \end{array}$$

$$\frac{18}{e^{3r}} \leftarrow 18$$

Sum = nåverdi som skal være 0 når r er internrenten

Får likning og løser for r.

$$-10 + \frac{18}{e^{3r}} = 0$$

$$\frac{18}{e^{3r}} = 10 \quad | \cdot e^{3r}$$

$$18 = 10 e^{3r} \quad | : 10$$

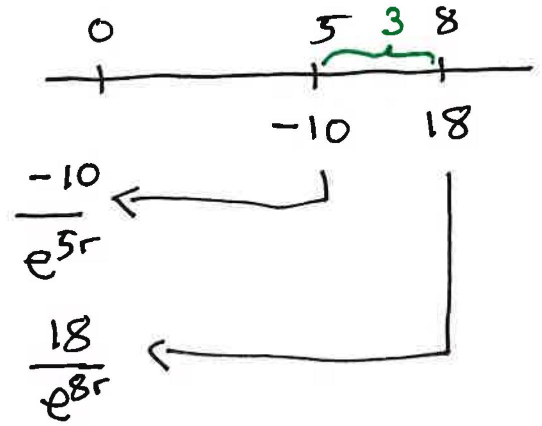
$$1{,}8 = \frac{18}{10} = e^{3r}$$

Setter begge sider inn i $\ln(-)$.

$$3r = \ln(e^{3r}) = \ln(1{,}8) \quad | : 3$$

$$\underline{\underline{r = \frac{\ln(1{,}8)}{3}}}$$

a ii)



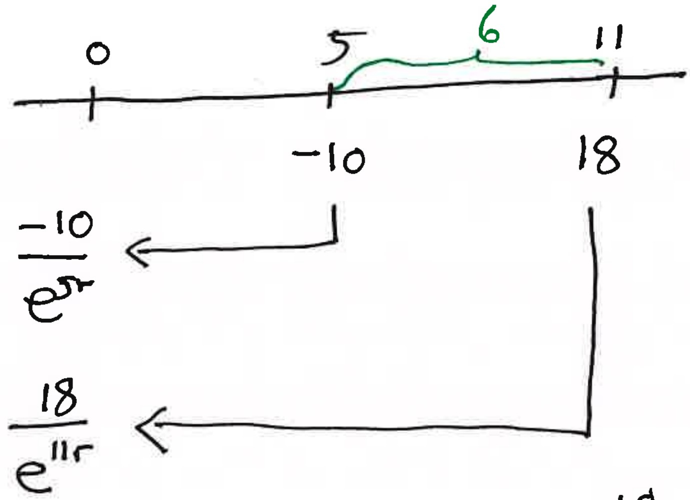
For likningen

$$\frac{18}{e^{8r}} = \frac{10}{e^{5r}} \quad \Big| \cdot \frac{e^{8r}}{10}$$

$$1{,}8 = \frac{18}{10} = \frac{e^{8r}}{e^{5r}} = e^{\overbrace{8r-5r}^{(8-5)r}} = e^{3r}$$

– samme likning som i (i).

a iii)



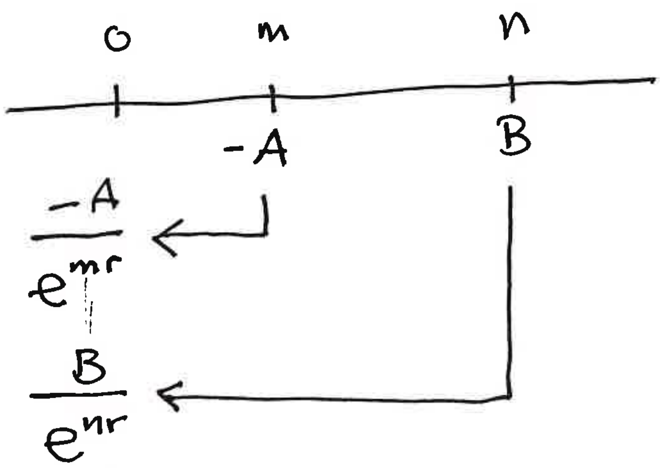
For likningen

$$\frac{18}{e^{11r}} = \frac{10}{e^{5r}} \quad \Big| \cdot \frac{e^{11r}}{10}$$

$$1{,}8 = \frac{18}{10} = e^{11r-5r} = e^{6r}$$

så $6r = \ln(1{,}8)$ og $r = \dfrac{\ln(1{,}8)}{6}$

10b)



= nåverdien

r internrenten

= 0

For likningen

$$\frac{B}{e^{nr}} = \frac{A}{e^{mr}} \quad \Big| \cdot \frac{e^{nr}}{A} \quad (A \neq 0)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{e^{nr}}{e^{mr}} = e^{nr-mr} = e^{(n-m)r}$$

For $(B \neq 0)$

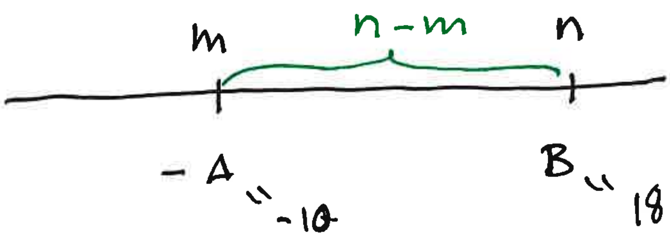
$$\ln\left(\frac{B}{A}\right) = (n-m)r \quad \Big| : (n-m)$$

så $r = \dfrac{\ln \frac{B}{A}}{n-m}$ $(n > m)$

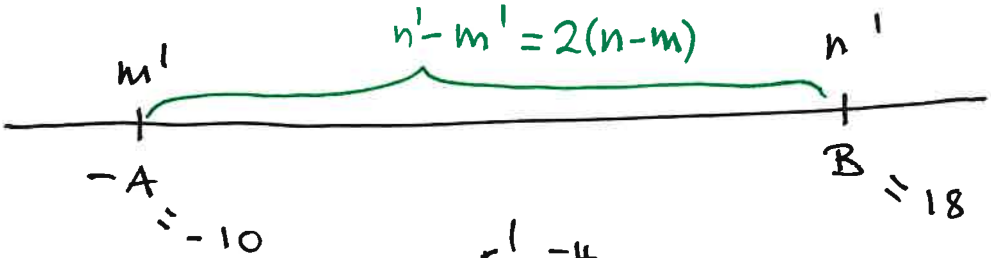
10c) I formelen $r = \dfrac{\ln(1{,}8)}{n-m}$

er $n-m$ det eneste som varierer!

– og $n-m$ er lengden på tidsrommet mellom betalingene



Anta vi har betalinger $-A$ ved tid m' og B ved tid n' slik at $n'-m' = 2(n-m)$



Da er internrenten r' gitt ved formelen

$$r' = \frac{\ln(1{,}8)}{n'-m'} = \frac{\ln(1{,}8)}{2(n-m)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1{,}8)}{n-m} = \frac{1}{2} \cdot r = \frac{r}{2}$$

så dobbelt så lenge mellom betalingene gir halvparten så stor internrente.

2. Ellipser

Oppg 7 a) Hvis $S = (x_0, y_0)$ er sentrum i en ellipse med horisontal halvakse a og vertikal halvakse b

er ellipsen gitt som løsningene til likningen
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Vi ser at $S = (5, 3)$

og a = avstanden mellom S og $(10, 3)$
$= 10 - 5 = 5$

b = avstanden mellom S og $(5, 6)$
$= 6 - 3 = 3$

så ellipselikningen er
$$\underline{\underline{\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1}}$$

b) $P = (10, 3)$, L er linjen gjennom P med stigningstall $-0{,}3$.

L er gitt ved ettpunktsformelen
$$y - 3 = -0{,}3 \cdot (x - 10) = -0{,}3x + 3$$

så $y = \underline{-0{,}3x + 6}$

Setter dette uttrykket inn for y i ellipselikningen

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(\underbrace{-0{,}3x+6-3}_{-0{,}3x+3})^2}{9} = 1 \quad \Big| \cdot 25 \cdot 9$$

$$9(x^2-10x+25) + 25(0{,}09x^2-1{,}8x+9) = 225$$

$$9x^2 - 90x + 225 + 2{,}25x^2 - 45x + 225 = 225$$

$$11{,}25x^2 - 135x = -225 \quad \Big| : 11{,}25$$

$$x^2 - 12x = -20$$

$\swarrow :2$

$$(x-6)^2 = -20 + 36 = 16$$

$x-6 = 4$ el. $x-6 = -4$

$\underline{x = 10}$ el. $\underline{x = 2}$

(oppgitt) (den nye)

og $y = -0{,}3 \cdot 2 + 6$

$= \underline{5{,}4}$.

så det andre skjæringspunktet er $\underline{\underline{(2\,,\;5{,}4)}}$

3. Omvendte funksjoner

Oppg 9b $f(x) = 2 \cdot \ln(x+3) - 1$, $D_f = \langle -3, \rightarrow \rangle$

Skal finne den omvendte funksjonen $g(x)$ med D_g og V_g.

① Løser likningen $y = 2\ln(x+3) - 1$ for x

Legger til 1 på b.s.

$$y + 1 = 2\ln(x+3)$$

Deler på 2 på b.s.

$$0{,}5y + 0{,}5 = \frac{y+1}{2} = \ln(x+3)$$

Setter v.s. og h.s. inn i $e^{(\ )}$

$$e^{0{,}5y+0{,}5} = e^{\ln(x+3)} = x+3$$

trekker fra 3 på b.s.

$$e^{0{,}5y+0{,}5} - 3 = x$$

② Bytter x og y og får

$$\underline{\underline{g(x) = e^{0{,}5x+0{,}5} - 3}}$$

③ $V_g \overset{\text{alltid}}{=} D_f = \underline{\underline{\langle -3, \rightarrow \rangle}}$

og $D_g \overset{\text{alltid}}{=} V_f$ som må bestemmes

$f(x) = 2\ln(x+3) - 1$ er strengt voksende

fordi $\ln(x)$ er strengt voksende, er

$2\ln(x)$ strengt voks., og videre er

$2\ln(x+3)$ —"—, og også

$f(x) = 2\ln(x+3) - 1$ er strengt voksende.

Vi har også at $\underbrace{2\ln(x+3)}_{\downarrow\, x+3 \to 0^+ \atop -\infty} - 1 \xrightarrow[x \to -3^+]{} -\infty$

Dessuten $2 \cdot \ln(x+3) - 1 \xrightarrow[x \to \infty]{} +\infty$

Altså er V_f = hele tallinjen (y-aksen!)

og D_g = hele tallinjen