MET 1181, 15. forelesning, 12. nov. 2020, Runar Ile

Plan 1. l'Hopitals regel

2. Grensekostnad, enhetskostnad, grenseinntekt

---

1. l'Hôpitals regel

Grenser av typen $\frac{0}{0}$ og $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Skrivemåte $\lim_{x\to 5} f(x)$ er tallet som $f(x)$ nærmer seg mer og mer når x nærmer seg 5 mer og mer.

Eks $f(x) = \dfrac{3x-3}{\ln(x)}$. Vil finne $\lim_{x\to 1} f(x)$

teller: $3x-3 \xrightarrow[x\to 1]{} 3\cdot 1 - 3 = 0$

nevner: $\ln(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln(1) = 0$

Altså et $\frac{0}{0}$ -uttrykk

Da kan vi bruke l'Hôpitals regel for å komme videre:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \overset{\text{l'Hôp.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(3x-3)'}{[\ln(x)]'}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3}{\frac{1}{x}} = \frac{3}{\frac{1}{1}} = \underline{\underline{3}}$$

f.eks. $f(0{,}99) = \dfrac{3\cdot 0{,}99 - 3}{\ln(0{,}99)} = 2{,}9850$

Deriverer teller og nevner for seg og prøver å finne grensen til den nye brøken.

<u>NB</u> Må være $\frac{0}{0}$ eller $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

<u>Eks</u> Bruk l'Hôpitals regel for å finne grensen

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1}$$

<u>Løsning</u> Teller: $x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Nevner: $e^x - 1 \xrightarrow[x \to 0]{} e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

Så $\frac{0}{0}$-uttrykk. Da kan vi bruke l'Hôpital

$(x)' = 1$ og $(e^x - 1)' = e^x$ så

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} \overset{\text{l'Hôp.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

f.eks. $\frac{0{,}01}{e^{0{,}01} - 1} = 0{,}9950$

<u>Eks</u> $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\text{l'Hôp.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\text{l'Hôp.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = \underline{\underline{0}}$$

"$\frac{\infty}{\infty}$" "$\frac{\infty}{\infty}$"

2. Grensekostnad, enhetskostnad, grenseinntekt

$K(x)$ er kostnaden ved å produsere x enheter.

$K'(x)$ er grensekostnadsfunksjonen (marginal kostnad)

<u>Tolkning</u> Hva koster det å produsere én enhet mer enn x enheter?

$$= K(x+1) - K(x) = \frac{K(x+1)-K(x)}{1}$$

$$\approx \lim_{h \to 0} \frac{K(x+h)-K(x)}{h} = K'(x)$$

Hvorfor $K'(x)$? – mye enklere matematikk!

$I(x)$ er inntekten ved å selge x enheter

$I'(x)$ er grenseinntekten ——— " ———

<u>Eks</u> x = antall tonn laks

$I'(50)$ = ekstra inntekt ved å selge ett tonn mer enn 50 tonn.

<u>Profittfunksjonen</u> (x = ant. produserte og solgte enheter)

$$P(x) = I(x) - K(x)$$

$P'(x)$ er grenseprofittfunksjonen

Enhetskostnaden ved å produsere x enheter:

$$A(x) = \frac{K(x)}{x}$$

"average unit cost"

„pris pr. enhet" – ikke en konstant!

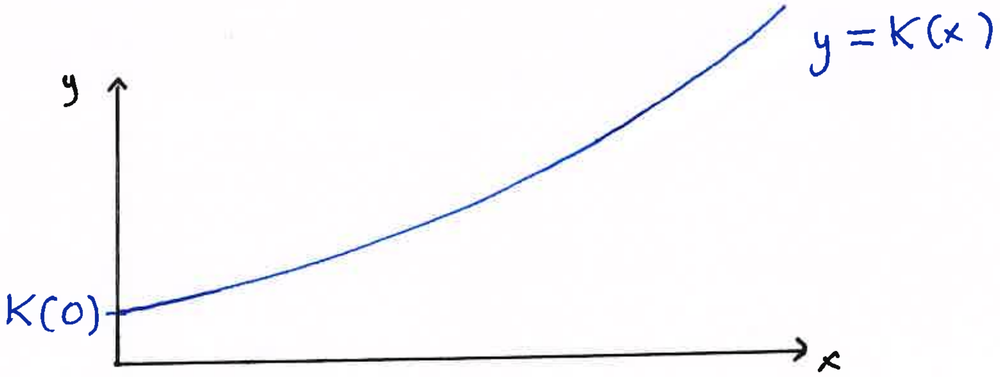
Starter 9⁰⁰

Definisjon $K(x)$ er en kostnadsfunksjon hvis

① $K(0) > 0$ (startkostnader)

② $K(x)$ er voksende $(K'(x) \geq 0)$

③ $K(x)$ er konveks $(K''(x) \geq 0)$



Definisjon Hvis $x = c$ er et minimumspunkt for $A(x)$, kalles c for kostnadsoptimum

Resultat Hvis $K''(x) > 0$ for alle $x > 0$, så er kostnadsoptimum løsningen på likningen

$$K'(x) = A(x)$$

<u>Begrunnelse</u> Finner de stasjonære punktene til $A(x)$:

$$A'(x) = \left[\frac{K(x)}{x}\right]'$$

$$\overset{\text{brøkr.}}{=} \frac{K'(x)\cdot x - K(x)\cdot 1}{x^2} \quad \left| \frac{:x}{:x} \right.$$

$$= \frac{K'(x) - A(x)}{x}$$

Så $A'(x) = 0$ tilsvarer $K'(x) - A(x) = 0$

dvs $K'(x) = A(x)$. Anta $x = c$ er en løsning på denne likningen (dvs $x = c$ er stasjonært punkt for $A(x)$)

Bruker andrederiverttesten for å sjekke at $x = c$ er et (lok.) minimumspunkt:

$$A''(c) > 0 \implies c \text{ lok. min.punkt.}$$

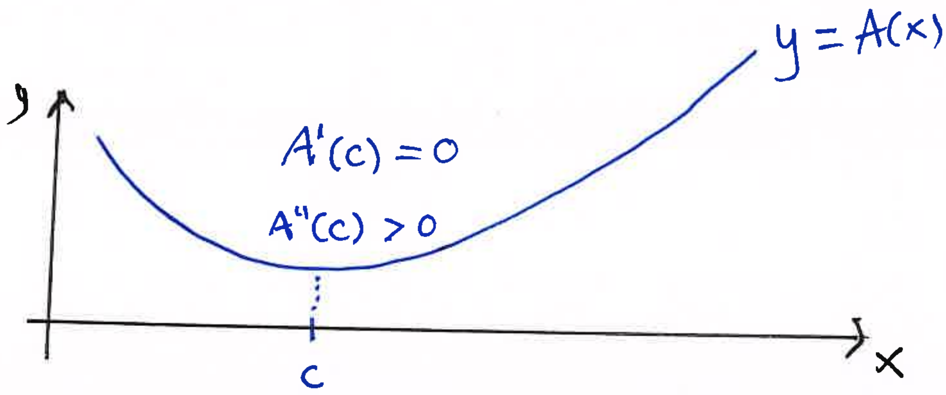
$$A''(x) \overset{\text{brøkr.}}{=} \frac{[K''(x) - A'(x)]\cdot x - [K'(x) - A(x)]\cdot 1}{x^2}$$

Setter inn $x = c$ i $A''(x)$:

$$A''(c) = \frac{[K''(c) - \overbrace{A'(c)}^{=0}]\cdot c - [\overbrace{K'(c) - A(c)}^{=0}]}{c^2}$$

$$= \frac{K''(c)\cdot \cancel{c}}{c^{\cancel{2}}} = \frac{K''(c)}{c} > 0 \quad (\text{for } c>0)$$

Så $x = c$ er lokalt minimumspunkt for $A(x)$.



<u>Eks</u> $\quad K(x) = x^2 + 200x + 160\,000$

Dette er en kostnadsfunksjon fordi

① $K(0) = 160\,000 > 0$

② $K'(x) = 2x + 200 > 0$ for $x > 0$
så $K(x)$ er en voksende funksjon

③ $K''(x) = 2 > 0$ for alle x
så $K(x)$ er (strengt) konveks.

Enhetskostnaden $A(x) = \dfrac{K(x)}{x} = \dfrac{x^2 + 200x + 160\,000}{x}$

$$= x + 200 + \frac{160\,000}{x}$$

Det fine resultatet gir at kostnadsoptimum er løsningen på likningen

$K'(x) = A(x)$ dvs

$$2x + 200 = x + 200 + \frac{160\,000}{x}$$

$$x = \frac{160\,000}{x} \quad | \cdot x$$

$$x^2 = 160\,000$$

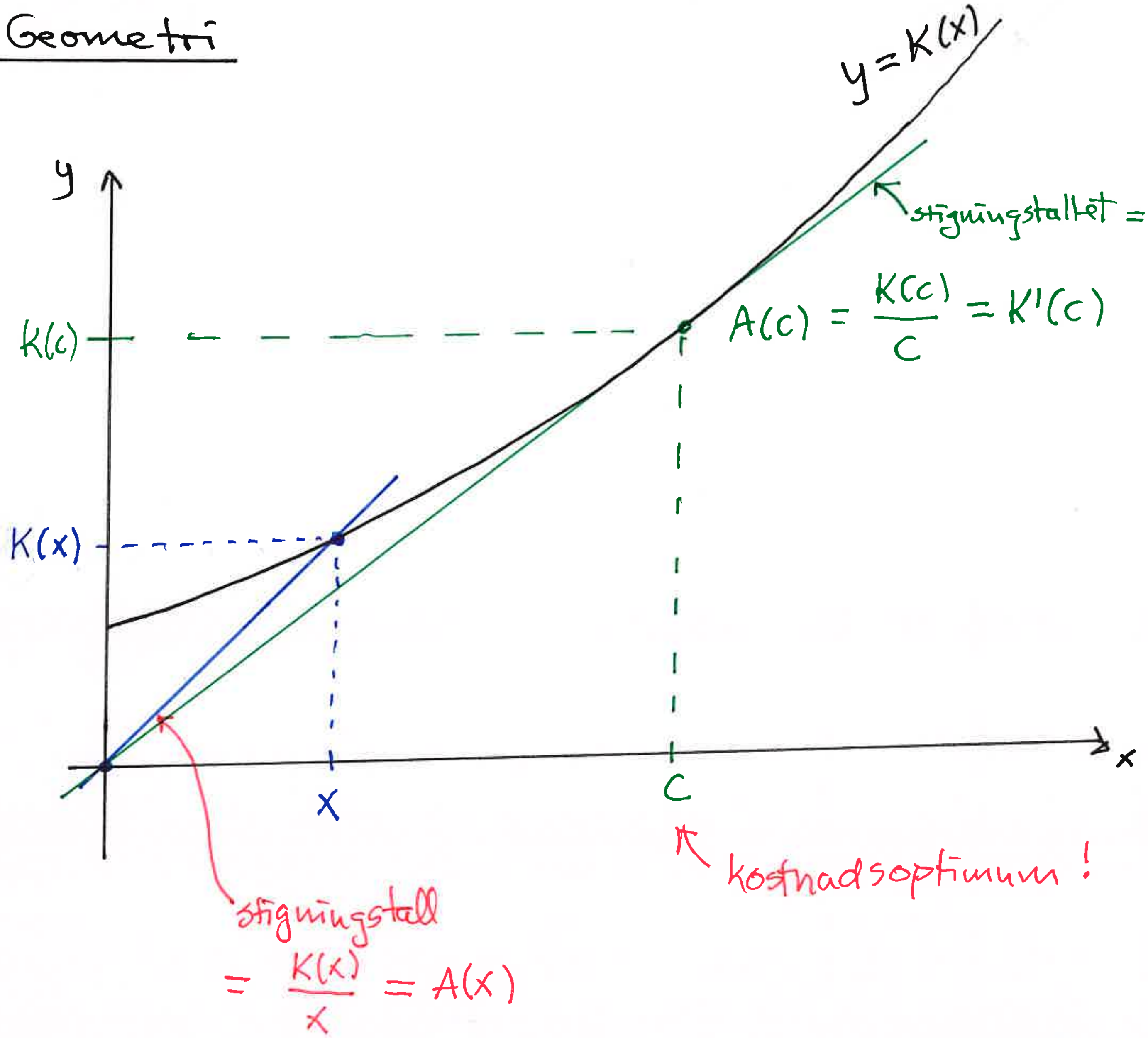
så $\underline{\underline{x = 400}}$ (bare pos. x)

er kostnadsoptimum

Minimal enhetspris:

$$A(400) = K'(400) = 2 \cdot 400 + 200 = \underline{\underline{1000}}$$

Geometri



og $\quad A(c) = \dfrac{K(c)}{c}$ er minimal enhetskostnad

$=$ stigningstallet til den grønne tangenten.