MET 1181, 16. forelesning, 19. nov. 2020, Runar Ile

Plan
1. Elastisitet — kap 4.9
2. Lineær approksimasjon — kap 4.10
3. Taylorpolynomer — " —

1. Elastisitet

p = pris/enhet

$D(p)$ = etterspørsel hvis prisen er p
(= ant. solgte enheter)

Problemet med forskjellige enheter.

Eks Et fat Nordsjøolje koster \$ 43,95
En liter — " — NOK 2,50

Priselastisiteten til etterspørselen er

$$\varepsilon = \frac{\text{relativ etterspørselsendring}}{\text{relativ prisendring}}$$

tall uten benevning

Eks På en måned synker prisen på en vare fra 12 tusen til 10 tusen og etterspørselen øker fra 50 mill. til 60 mill.

Da er

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{60-50}{50}\right)}{\left(\frac{10-12}{12}\right)} = \frac{\left(\frac{10}{50}\right)}{\left(\frac{-2}{12}\right)} = \frac{120}{-100} = \underline{\underline{-1,2}}$$

Tolkning : Hvis prisen øker med 1 %
vil etterspørselen falle med 1,2 %

Anta prisen endres fra p til $p+h$. Da er relativ prisendring $\frac{p+h-p}{p} = \frac{h}{p}$

$$\frac{\text{relativ etterspørselsendring}}{\text{relativ prisendring}}$$

$$= \frac{\left(\frac{D(p+h) - D(p)}{D(p)}\right)}{\left(\frac{h}{p}\right)} \quad \Big| \cdot \frac{p \cdot D(p)}{p \cdot D(p)}$$

$$= \frac{D(p+h) - D(p)}{h} \cdot \frac{p}{D(p)}$$

$\Big\downarrow h \to 0$ (prisendringen nærmer seg 0)

$$\boxed{\mathcal{E}(p) = D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)}}$$

Dette er den momentane priselastisiteten til etterspørselsfunksjonen $D(p)$.

Vil inntekten gå opp eller ned hvis prisen øker litt ?

Inntekt $I(p) = p \cdot D(p)$

Marginalinntekten med hensyn på prisen er

$$I'(p) \overset{\text{produkt-regel}}{=} 1 \cdot D(p) + p \cdot D'(p)$$

$$= D(p) \cdot \left[1 + \frac{p \cdot D'(p)}{D(p)}\right]$$

$$= \underbrace{D(p)}_{\text{alltid pos.}} \cdot \underbrace{[1 + \varepsilon(p)]}_{\text{pos. eller neg. ?}}$$

Hvis $\underline{\varepsilon(p) < -1}$
får vi neg. $I'(p)$
så $I(p)$ er avtagende
– får <u>elastisk</u> etterspørsel

Hvis $\underline{\varepsilon(p) > -1}$
får vi pos. $I'(p)$
så $I(p)$ er voksende
– får <u>uelastisk</u> etterspørsel

Hvis $\underline{\varepsilon(p) = -1}$
gir <u>nøytralelastisk</u> etterspørsel

Starter igjen 8^{55}

<u>Eks</u> $D(p) = 50 - p$ for $0 < p < 50$

Da er $D'(p) = -1$ og $\varepsilon(p) = \dfrac{D'(p) \cdot p}{D(p)} = \dfrac{(-1) \cdot p}{50 - p}$

$$= \underline{\underline{\frac{-p}{50-p}}}$$

<u>Spørsmål</u>: For hvilke p vil etterspørselen være elastisk ?

Må løse ulikheten $\varepsilon(p) < -1$

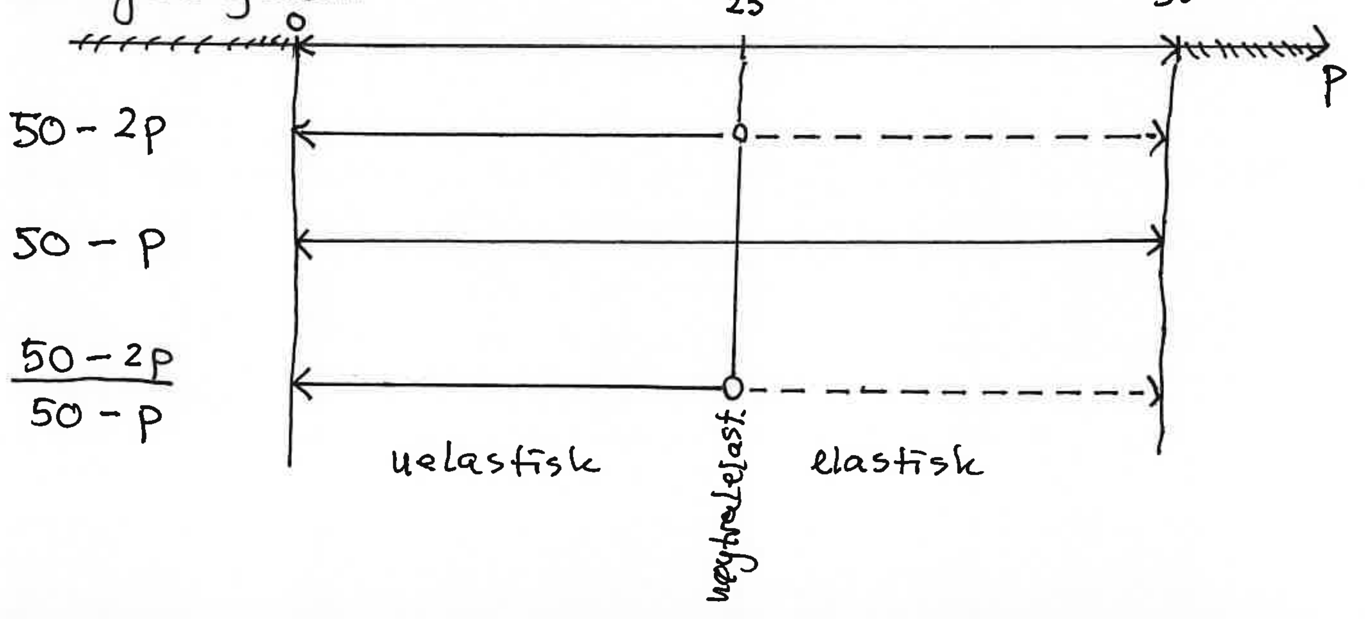
dvs $\dfrac{-p}{50-p} < -1 \quad | +1$

$$\frac{-p}{50-p} + 1 < 0$$

$$\frac{-p}{50-p} + \frac{50-p}{50-p} < 0$$

$$\frac{50-2p}{50-p} < 0$$

Fortegnsskjema:

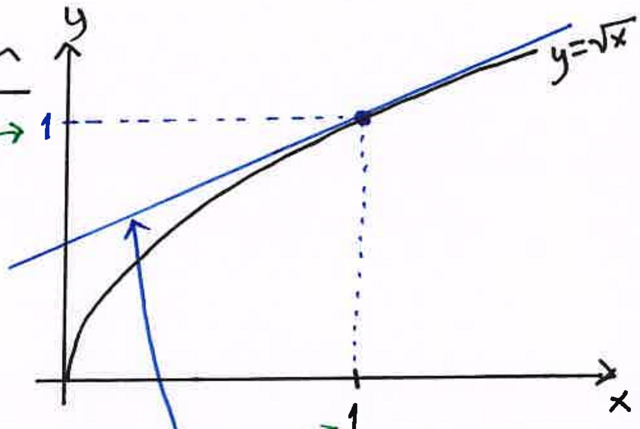


Så elastisk etterspørsel for p i $\langle 25, 50 \rangle$

og uelastisk —— " —— $\langle 0, 25 \rangle$

og nøytralelastisk —— " —— $p = 25$

2. Lineær approksimasjon



den lineære approksimasjonen til $f(x)$ i 1

Eks $f(x) = \sqrt{x}$

Vi kan finne uttrykket for tangentlinjen ved å bruke etpunktsformelen:

$$y - 1 = f'(1) \cdot (x - 1)$$

så $y = \overset{= f(1)}{1} + f'(1) \cdot (x - 1)$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} \cdot (x - 1)$$

som er Taylor-polynomet av grad 1 i 1 til $\sqrt{x}$.

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2} - 1}$

$= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

så $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

skriver $P_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1)$

Eks $P_1(1{,}1) = 1 + \frac{1}{2}(1{,}1 - 1)$

$$= 1 + \frac{0{,}1}{2} = \underline{1{,}05}$$

(sjekk: $\sqrt{1.1} = 1.04881$)

3. Taylor polynomer

Eks $f(x) = \sqrt{x}$

Taylorpolynomet av grad 2 til $f(x)$ i 1 er

$$P_2(x) = \overbrace{f(1) + f'(1)\cdot(x-1)}^{P_1(x)} + \frac{f''(1)}{2}\cdot(x-1)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{2}(x-1)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

så $f''(1) = -\frac{1}{4\cdot 1\cdot\sqrt{1}}$

$$= -\frac{1}{4}$$

Mønster

$$\boxed{P_2(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2}$$

I eks. er $a = 1$.

$$\sqrt{2} = f(2) \approx P_2(2) = 1 + \frac{1}{2}(2-1) - \frac{1}{8}(2-1)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 1.375$$

(sjekk: $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$)

$$\sqrt{1{,}2} = f(1{,}2) \approx P_2(1{,}2) = 1 + \frac{1}{2}(1{,}2-1) - \frac{1}{8}(1{,}2-1)^2$$

$$= 1 + 0{,}1 - 0{,}005 = 1{,}0950$$

(sjekk: $\sqrt{1{,}2} = 1{,}0954\ldots$)

Eks $f(x) = \sqrt{x}$

Da er Taylorpolynomet av grad 3 til $f(x)$ i 1 gitt som:

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{f'''(1)}{6} \cdot (x-1)^3$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{6} \cdot (x-1)^3$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}-1}$$

$$= \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$$

så

$$f'''(1) = \frac{3}{8 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{1}}$$

$$= \frac{3}{8}$$

Eks:

$$P_3(1{,}2) = P_2(1{,}2) + \frac{1}{16} \cdot (1{,}2-1)^3$$

regne

$$= 1{,}0955$$

$$\left(\sqrt{1.2} = 1{,}0954\right)$$

Mønster: $P_3(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}\cdot(x-a)^3$

Taylorpolynomet av grad n for $f(x)$ i a er:

$$\boxed{P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

hvor $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$

– Se GeoGebrafil for grafene til

$f(x) = \sqrt{x}$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$