Plan

1 Optimering uten bibetingelser
2 Optimering med bibetingelser
3 Ekstremverdisetningen

Ekstra Forelesninger:

Onsdag 26/05: Foreles. 32

En forelesning D +
veiledning rett før eksamen

① Optimering uten bibetingelser

max/min $f(x,y)$

Metode: ① Finne alle kandidatpkt ← alle pkt (x,y) som kan være max/min

må være med i D_f!

a) Stasjonære pkt: $\underbrace{f'_x = f'_y = 0}_{FOC}$

b) Andre kritiske pkt: f'_x eller f'_y eksisterer ikke

c) Randpkt for D_f : Finn D_f

⇓

Liste med kandidatpkt. Regn f for hvert kandidatpkt.

② Klassifisering av kandidatpkt

som lokal maks, lokal min eller sadelp.

a) Andrederivert-testen : $H(f)(x^*,y^*)$

b) Unntak: * stasjonære pkt med $\det H(f)(x^*,y^*) = 0$
* kandidat pkt som ikke er stasjonære pkt.

⇒ Må bruke defn. av lokalt maks/min.

③ Avgjøre om beste kandidatpkt er maks/min

- Bruk defn. av (globalt) maks/min.
- Triks: Se på snitt, kurver og hva som skjer med f på disse.

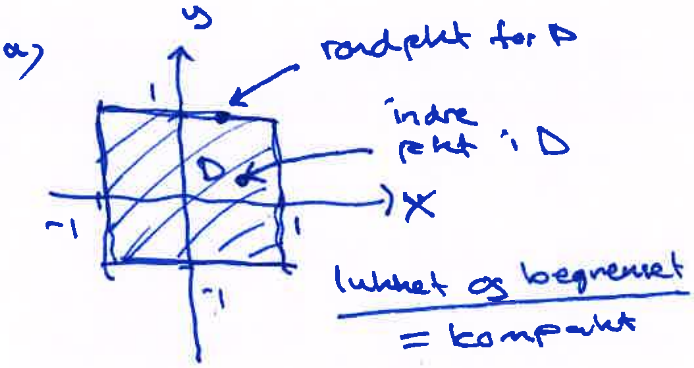
Nyttig hjelpemiddel: Wolfram Alpha
www.wolframalpha.com

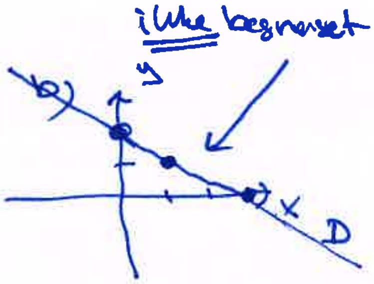
② Optimering med bibetingelser

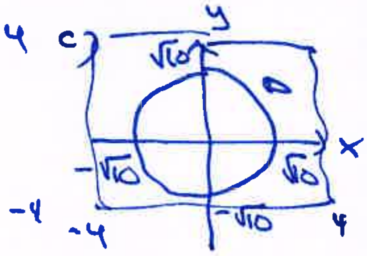
Eks: a) maks $\underbrace{f(x,y) = x^2+y^2}_{\text{objektivfn.}}$ når $\underbrace{-1 \le x,y \le 1}_{\text{bibetingelser}}$

b) min $\underbrace{f(x,y) = xy}_{\text{obj. fn.}}$ når $\underbrace{2x+3y=6}_{\text{bibetingelse}}$

c) maks $\underbrace{f(x,y) = x+3y}_{\text{obj. fn.}}$ når $\underbrace{x^2+y^2=10}_{\text{bibetingelse}}$







$D = \{(x,y): -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$
mengden av tillatte pkt.

D: $2x+3y=6$
$x=0$: $y=2$
$y=0$: $x=3$

$3y = 6-2x$
$y = 2 - \frac{2}{3}x$
Kun rand pkt

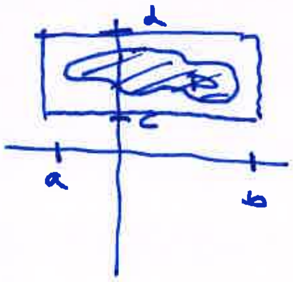
D: $x^2+y^2=10$
Kun randpkt
lukket og begrenset
= kompakt

Kompakte mengder:

En delmengde D av $\mathbb{R}^2$ kalles kompakt hvis følgende betingelser er oppfylt:

i) D er lukket: Alle randpkt for D er med i D.
$= \leq \geq$: ok $\quad < \; >$: ikke lukket

ii) D er begrenset: Det finnes tall a, b, c, d slik at



$$\boxed{\begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{array}}$$

for alle (x,y) i D.

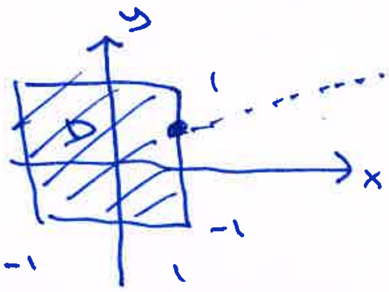
Ekstremverdisetningen

Hvis f er en kontinuerlig funksjon på en kompakt mengde D, så har f et globalt maks og et globalt min på D.

Eks: maks $f(x,y) = x^2 + y^2$ (kont.) når $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ (D er kompakt)

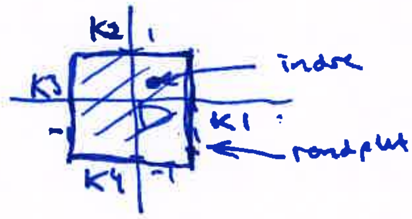
$\Downarrow$

Det fins maks (og min)



Eks: max $f(x,y) = x^2 + y^2$ når $-1 \leq x, y \leq 1$

Metode: (A) Vet at det fins et maks fra ekstremverdisetn. siden D er kompakt.



(B) Kandidatpkt:

(a) Stasjonære pkt for f $(f'_x = f'_y = 0)$ som er indre pkt.

(b) Annet kritisk pkt $(f'_x$ eller f'_y fins ikke$)$ som er indre pkt

(c) Randpkt for D

Regning: (a) $f'_x = 2x = 0 \quad x = 0$

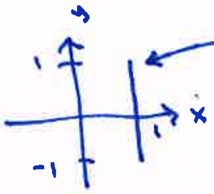
$f'_y = 2y = 0 \quad y = 0$

(indre pkt.)

Kandidat: $(x,y) = (0,0)$ $\underline{f = 0}$

(b) Ingen.

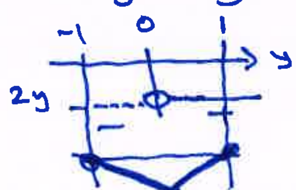
(c) Randpkt:



K1: $x = 1$, $-1 \leq y \leq 1$

$f(1,y) = 1^2 + y^2 = \underline{y^2 + 1}$

$f(1,y)'_y = 2y$

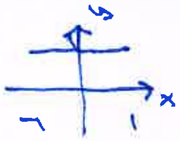


$f(1,-1) = 2$

$f(1,1) = 2$

Kandidat på K1: $(x,y) = (1,-1), (1,1)$ $\underline{f = 2}$

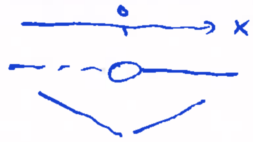
K2:
K3:
K4:
} på samme måte



K2: $y=1$, $-1 \le x \le 1$

$f(x,1) = x^2+1^2 = \underline{x^2+1}$

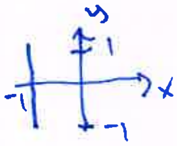
$f(x,1)'_x = 2x$



$f(-1,1)=2$

$f(1,1)=2$

Kandidat på K2: $(x,y)=(-1,1),(1,1)$ $\quad \underline{f=2}$

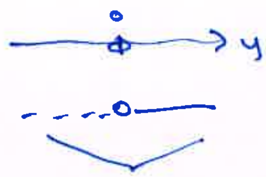


K3: $x=-1$, $-1 \le y \le 1$

$f(-1,y) = (-1)^2+y^2$
$= y^2+1$

same som i K1

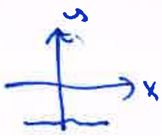
$f(-1,y)'_y = 2y$



$f(-1,-1) = 2$

$f(-1,1) = 2$

Kandidat på K3: $(x,y)=(-1,-1),(-1,1)$ $\quad \underline{f=2}$



K4: $-1 \le x \le 1$, $y=-1$

$f = x^2+(-1)^2 = x^2+1$ ← som K2

$f(x,-1)'_x = 2x$

$f(-1,-1)=2$

$f(1,-1)=2$

Kandidat på K4: $(x,y)=(-1,-1),(1,-1)$ $\quad \underline{f=2}$

Konklusjon: Vi har maks også ekstremverdisetn.

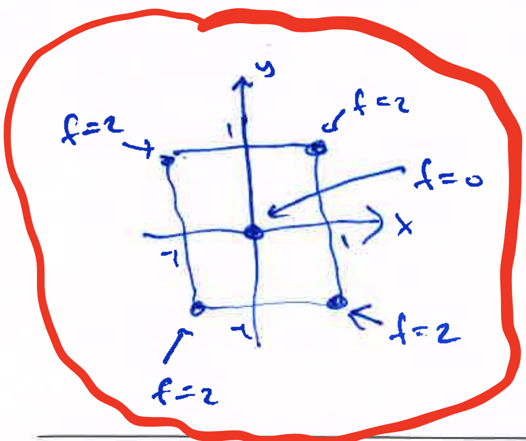
Kandidater: $f(0,0)=0$ ← indre

$f(1,1)=f(-1,1)$

$=f(1,-1)=f(-1,-1)=2$ ← randpkt

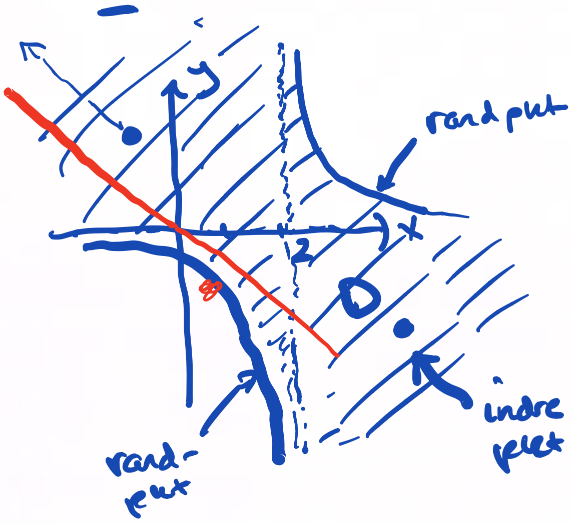
⇓

maks: $\underline{\underline{f=2}}$ i $\underline{\underline{(\pm1,\pm1)}}$



Del 2. Oppgaveverk 29

1. D: $y(x-2) \le 3$ $D = \{(x,y) : y(x-2) \le 3\}$



$\underline{y(x-2) = 3}$: ⟵ randpkt

$y = \dfrac{3}{x-2}$ $x=2$ asymptote, $y=0$ —"—

⟶ $x=2$: $y \cdot 0 < 3$, $0 < 3$

$y(x-2) < 3$ ↗ $x<2$: $y > \dfrac{3}{x-2}$
↙ $x>2$: $y < \dfrac{3}{x-2}$

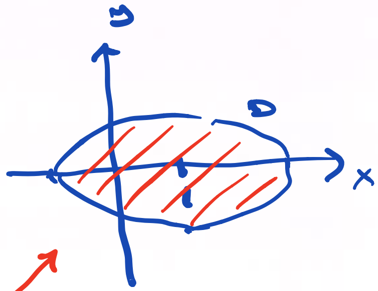
D er lukket, men ikke begrenset ⟹ ikke kompakt

$\boxed{(-a, a) \text{ er med i D når } a \to \pm\infty.}$

2 g) $x^2 - 2x + 4y^2 = 4$ $| +1$

$(x-1)^2 + 4y^2 = 5$

$\dfrac{(x-1)^2}{5} + \dfrac{y^2}{5/4} = 1$ ellipse senter $(1,0)$, $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{5}/2$

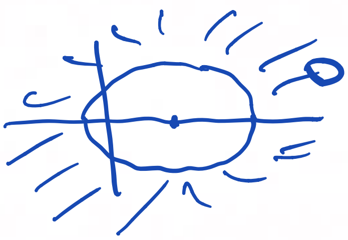


h) $x^2 - 2x + 4y^2 \le 4$

$\dfrac{(x-1)^2}{5} + \dfrac{y^2}{5/4} \le 1$

ellipsen fra g) og alle pkt inne i ellipsen
kompakt

i) $x^2 - 2x + 4y^2 \ge 4$



lukket men ikke begrenset ⟹ ikke kompakt

m) $\sqrt{x^2+y^2} = 3$

$x^2+y^2 = 9$

Kompakt

n) $\sqrt{x^2+y^2} \leq 3$

$x^2+y^2 \leq 9$

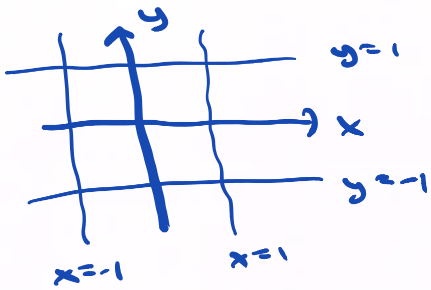
kompakt

o) $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0$

$(x^2-1)(y^2-1) = 0$

$x^2=1$ eller $y^2=1$

$x=\pm 1$ eller $y=\pm 1$



ikke kompakt

p) $(x^2-1)(y^2-1) = 1$

$$y^2-1 = \frac{1}{x^2-1}$$

$$y^2 = 1 + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+1}{x^2-1}$$

$\frac{1}{x^2-1} \to 0$ når $x \to \pm\infty$

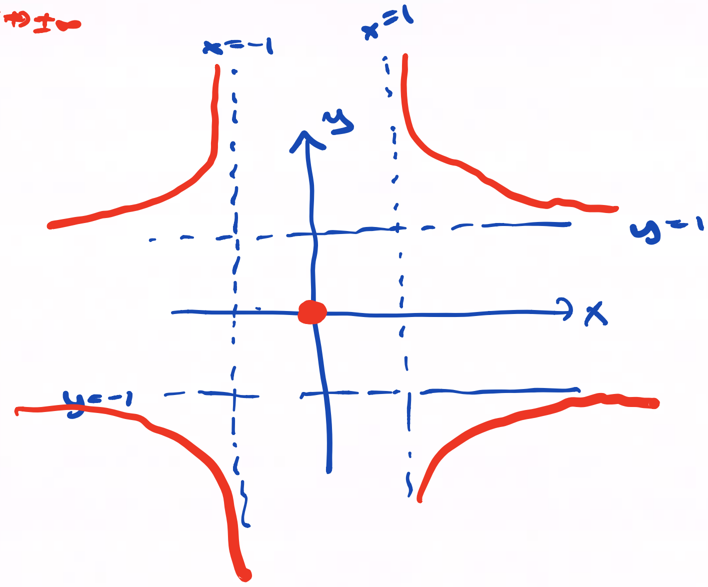
$$y^2 = \frac{x^2}{x^2-1} \checkmark$$

Asymptoter:

$x^2=1 \Rightarrow x = \pm 1$

$y^2=1 \quad y = \pm 1$

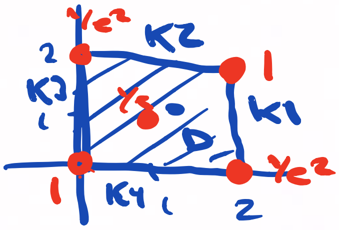
$$y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$$



ikke kompakt

5. c) max/min $f(x,y) = e^{xy-x-y}$ når $0 \le x,y \le 2$

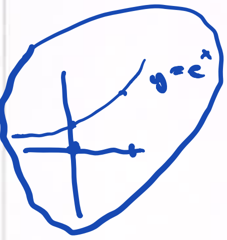
D kompakt $\Rightarrow$ fins maks/min (ekstremverdisetn.)



Indre pkt: $f(x,y) = e^u$, $u = xy - x - y$

$f'_x = e^u \cdot (y-1) = 0$ $\quad y = 1$ $\quad \Rightarrow (x,y) = (1,1)$ indre pkt $\quad f = 1/e$

$f'_y = e^u \cdot (x-1) = 0$ $\quad x = 1$



Randpkt:

K1: $x = 2$, $0 \le y \le 2$ $\quad f = e^{y-2}$ $\Rightarrow$ Kandidat: $(2,2)$ for maks $f = 1$; $(2,0)$ min $f = 1/e^2$

$f'_y = e^{y-2} \cdot 1 > 0$

y	0	2
f'	+	

K2: $y = 2$, $0 \le x \le 2$ $\quad f = e^{x-2}$ $\quad f'_x = e^{x-2} \cdot 1 > 0$

$(2,2)$ for maks: $f = 1$

$(0,2)$ for min: $f = 1/e^2$

K3: $x = 0$, $0 \le y \le 2$ $\quad f = e^{-y}$ $\quad f' = e^{-y} \cdot (-1) < 0$

$(0,0)$ for maks: $f = 1$

$(0,2)$ min: $f = 1/e^2$

K4: $y = 0$, $0 \le x \le 2$ $\quad f = e^{-x}$ $\quad f' = e^{-x} \cdot (-1)$

$(0,0)$ for maks: $f = 1$

$(2,0)$ min: $f = 1/e^2$

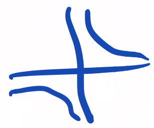
$\Downarrow$

maks: $f = 1$: $(0,0)$, $(2,2)$

min: $f = 1/e^2$: $(0,2)$, $(2,0)$

3. $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ kont} \\ D \text{ kompakt} \end{array}}$ $\Big\}$ f maks/min på D

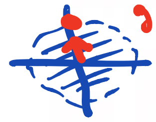
$f \to \infty$



$f(x,y) = x^2+y^2$ har ikke maks på D

Eks.: D lukket, ikke begrenset $\quad D: xy=1$

E begrenset, ikke lukket $\quad E: x^2+y^2<1$



$g<1$ men er ikke nådd i D

$g(x,y) = y$ har ikke maks

Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Vi ser på delmengden $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gitt ved ulikheten $y(x-2) \leq 3$. Lag en skisse av $D = \{(x,y) : y(x-2) \leq 3\}$, og marker indre punkter og randpunkter for D. Er D kompakt?

Oppgave 2.
Vi ser på en delmengde av planet $\mathbb{R}^2$ gitt ved følgende betingelser. Avgjør om delmengden er kompakt. Det er nyttig å lage en skisse av området.

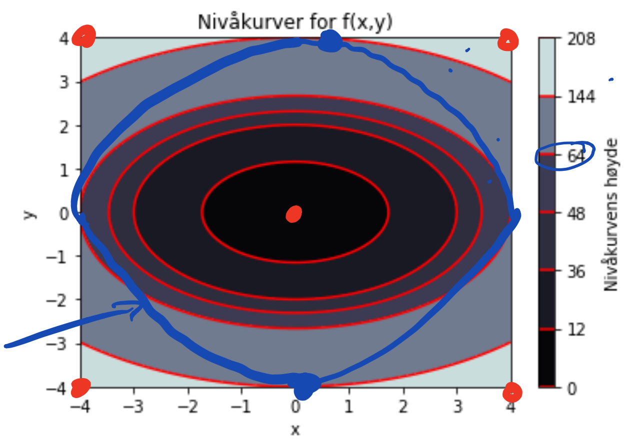
a) $2x + 3y = 6$	b) $2x + 3y < 6$	c) $2x + 3y \leq 6$	d) $x^2 + y^2 = 4$
e) $x^2 + y^2 \geq 4$	f) $x^2 + y^2 \leq 4$	g) $x^2 - 2x + 4y^2 = 4$	h) $x^2 - 2x + 4y^2 \leq 4$
i) $x^2 - 2x + 4y^2 \geq 4$	j) $xy = 1$	k) $xy \leq 1$	l) $xy \geq 1$
m) $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$	n) $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3$	o) $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0$	p) $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 = 1$

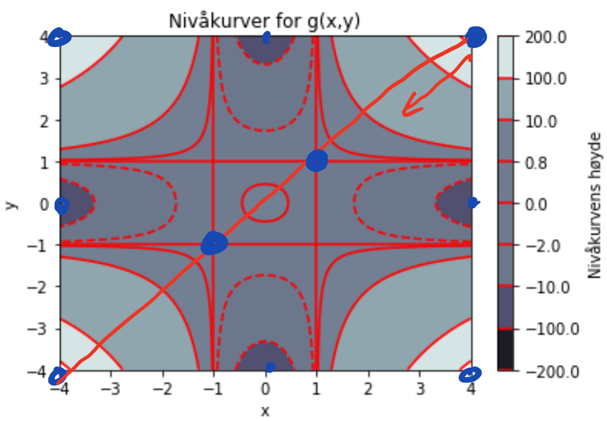
Oppgave 3.
Hva sier ekstremverdisetningen? Gi eksempler på en mengde D i planet som er lukket men ikke begrenset, og en mengde E i planet som er begrenset men ikke lukket. Kan du finne en funksjon $f(x,y)$ som ikke har maksimum og minimum på D, og en funksjon $g(x,y)$ som ikke har maksimum og minimum på E?

Oppgave 4.
Nivåkurver for funksjonene $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ og $g(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$ i området $-4 \leq x,y \leq 4$ er vist i figurene nedenfor.

$(x^2-1)(y^2-1)$

$x^2+y^2 = 16$





$y = x$: $g = (x^2-1)(x^2-1) = (x^2-1)^2 \geq 0$

a) Finn max / min $f(x,y)$ når $-4 \leq x,y \leq 4$ ved hjelp av figuren.

b) Finn max / min $g(x,y)$ når $-4 \leq x,y \leq 4$ ved hjelp av figuren.

c) Finn max / min $f(x,y)$ når $x^2 + y^2 = 16$ ved hjelp av figuren.

d) Finn max / min $g(x,y)$ når $x = y$ ved hjelp av figuren.

maks: $(4,4), (-4,-4)$ $f = 225$
min: $(1,1), (-1,-1)$ $f = 0$

maks $(\pm4,\pm4)$ min $(0,0)$
maks $(\pm4,\pm4)$ $f = 225$
maks $(0,\pm4)$ $f = 144$
min $(\pm4,0)$ $f = 64$
b) min $(\pm4,0), (0,\pm4)$ $f = -15$

Oppgave 5.
Løs optimeringsproblemene:

a) $\max / \min f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ når $0 \leq x,y \leq 1$

b) $\max / \min f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ når $0 \leq x,y \leq 2$

c) $\max / \min f(x,y) = e^{xy-x-y}$ når $0 \leq x,y \leq 2$

d) $\max / \min f(x,y) = xy(x^2 - y^2)$ når $-1 \leq x,y \leq 1$

e) $\max / \min f(x,y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$ når $-1 \leq x,y \leq 1$

Oppgave 6.
Oppgaver fra læreboken: 7.6.1 - 7.6.3
Oppgaver fra oppgaveboken: 9.27 - 9.31

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Randpunkter er gitt ved likningen $y(x-2) = 3$, det vil punkter på grafen til $y = 3/(x-2)$ (en hyperbel). Indre punkt er gitt ved $y(x-2) < 3$, det vil si punkter under hyperbelen når $x > 2$, og punkter over hyperbelen når $x < 2$, samt alle punkter med $x = 2$. Mengden D er ikke kompakt (lukket men ikke begrenset).

Oppgave 2.

a) Nei	b) Nei	c) Nei	d) Ja	e) Nei	f) Ja	g) Ja	h) Ja
i) Nei	j) Nei	k) Nei	l) Nei	m) Ja	n) Ja	o) Nei	p) Nei

Oppgave 4.

a) $f_{\min} = 0$ i $(0,0)$, og $f_{\max} = 208$ i $(\pm 4, \pm 4)$

b) $f_{\min} = -15$ i $(0, \pm 4)$ og $(\pm 4, 0)$, og $f_{\max} = 225$ i $(\pm 4, \pm 4)$

c) $f_{\min} = 64$ i $(\pm 4, 0)$, og $f_{\max} = 144$ i $(0, \pm 4)$

d) $f_{\min} = 0$ i $(1,1)$ og $(-1,-1)$, og $f_{\max} = 225$ i $(4,4)$ og $(-4,-4)$

Oppgave 5.

a) $f_{\max} = 1,\ f_{\min} = -1$

b) $f_{\max} = 8,\ f_{\min} = -1$

c) $f_{\max} = 1,\ f_{\min} = 1/e^2$

d) $f_{\max} = 2\sqrt{3}/9,\ f_{\min} = -2\sqrt{3}/9$

e) $f_{\max} = 1,\ f_{\min} = 0$