MET1181, 4. forelesning, 3. sept. 2020, Runar Ile

Plan:
1. Regulære kontantstrømmer
2. Uendelige rekker og grenseverdier
3. Eulers tall og kontinuerlig forrentning

1. Regulære kontantstrømmer

Et fast beløp betales hver termin.

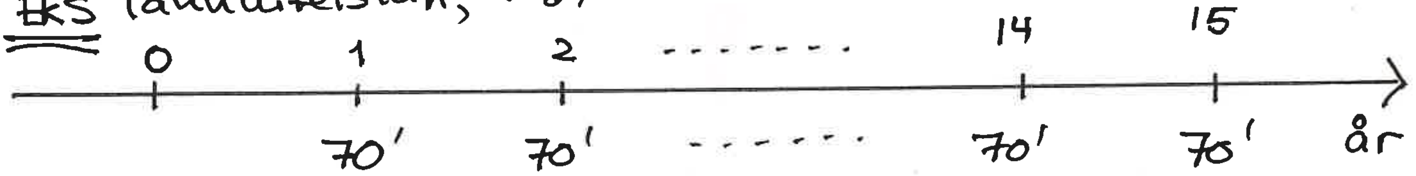
Eks Annuitetslån (nåverdien av kontantstrømmen = lånebeløpet)

Eks Sparing med et fast beløp hver termin.

Fremtidsverdi el. sluttverdi: Det du har spart opp med renter.

Nåverdien og fremtidsverdiene til en regulær kontantstrøm er geometriske rekker.

Eks (annuitetslån, 4%)



$$\frac{70'}{1.04}$$

....

$$\frac{70'}{1.04^2}$$

$\vdots$

$$\frac{70'}{1.04^{14}}$$

$$\frac{70'}{1.04^{15}}$$

summen er nåverdien til den regulære kontantstrømmen

Vi får en geometrisk rekke:

$$\frac{70'}{1.04} + \frac{70'}{1.04^2} + \dots + \frac{70'}{1.04^{14}} + \frac{70'}{1.04^{15}}$$

Leser denne geometriske rekken baklengs:

$$a_1 = \frac{70'}{1.04^{15}}, \quad k = 1.04, \quad n = 15$$

Nåverdien til kontantstrømmen (= det vi får låne) får vi fra formelen for summen av geometrisk rekke.

$$a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = \frac{70'}{1.04^{15}} \cdot \frac{1.04^{15} - 1}{0.04} = \underline{\underline{778'}}$$

Vi kan også lese rekken forlengs:

$$a_1 = \frac{70'}{1.04}, \quad k = \frac{1}{1.04}, \quad n = 15$$

Da er summen $\frac{70'}{1.04} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.04}\right)^{15} - 1}{\frac{1}{1.04} - 1} \quad \Big| \frac{\cdot(-1)}{\cdot(-1)}$

$$= \frac{70'}{1.04} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{1.04^{15}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{1.04}\right)} = \frac{70' \cdot \left(1 - \frac{1}{1.04^{15}}\right)}{1.04 - 1}$$

$$= \frac{70'\left(1 - \frac{1}{1.04^{15}}\right)}{0.04} = \underline{\underline{778'}}$$

2. Vendelige rekker og grenseverdier

Eks: Annuitet : 70'

rente : 4 %

Ant. terminer : n

Første betaling : 1 år fra nå.

Nåverdien til kontantstrømmen (lånebeløpet) :

$$\frac{70'}{1{,}04^n} \cdot \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} = \frac{70' \cdot (1{,}04^n - 1)}{1{,}04^n \cdot 0{,}04}$$

$$= \frac{70' \cdot (1{,}04^n - 1) \;:\; 1{,}04^n}{\cancel{1{,}04^n} \cdot 0{,}04 \;:\; \cancel{1{,}04^n}}$$

$$= \frac{70' \cdot \left(1 - \frac{1}{1{,}04^n}\right)}{0{,}04}$$

nærmer seg 0 når n blir større og større ($n \to \infty$)

Hele brøken nærmer seg

$$\frac{70' \cdot (1 - 0)}{0{,}04}$$

$$= \frac{70'}{0{,}04} = \underline{\underline{1750'}}$$

Konklusjon: Hvis du betaler banken 70 000 hvert år for all fremtid, kan banken låne deg 1,75 mill med 4% rente.

3. Euler's number and continuous compounding

Ex You deposit 1000 into an account with 12% nominal interest.

compounding	Balance after one year
Annual	$1000 \cdot 1.12 = 1120.00$
Half year	$1000 \cdot 1.06^2 = 1123.60$
Quarterly	$1000 \cdot 1.03^4 = 1125.51$
Monthly	$1000 \cdot 1.01^{12} = 1126.83$
Daily	$1000 \cdot \left(1 + \frac{0.12}{365}\right)^{365} = 1127.47$
Pattern (n periods)	$1000 \cdot \left(1 + \frac{0.12}{n}\right)^n$

!!

Euler's number: $e = 2.71828 \ldots$

1 $\boxed{e^x}$

Calculate: $1000 \cdot e^{0.12} = 1127.50$

1000 $\boxed{\times}$ 0.12 $\boxed{e^x}$ $\boxed{=}$

Euler's number is defined as the limit of $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ when n approaches ∞ ('becomes bigger and bigger')

Write: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e$

3. Eulers tall og kontinuerlig forrentning

Eks Du setter inn 1000 på en konto med 12 % nominell rente. Pengene står i ett år.

Forrentning	Balanse etter ett år
Årlig	$1000 \cdot 1.12 = 1120{,}00$
Halvårlig	$1000 \cdot 1.06^2 = 1123{,}60$
Kvartalsvis	$1000 \cdot 1.03^4 = 1125{,}51$
Månedlig	$1000 \cdot 1.01^{12} = 1126{,}83$
Daglig	$1000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{365}\right)^{365} = 1127{,}47$
Mønsteret (n terminer)	$1000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{n}\right)^n$

!!

Eulers tall: $e = 2{,}71828\ldots$

1 $\boxed{e^x}$

Beregner $1000 \cdot e^{0{,}12} = 1127{,}50$

1000 $\boxed{\times}$ $0{,}12$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{=}$

Eulers tall er definert som grenseverdien til $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ når n blir større og større

Skriver $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e$

Eks $\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}71692\ldots$

$$\left(1+\frac{1}{1\,\text{mill}}\right)^{1\,\text{mill}} = 2{,}71828\ldots$$

Tilbake til eksempelet med $r = 12\%$.

$$\left(1+\frac{0{,}12}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{0{,}12}\right)}\right)^{n}$$

$$= \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{0{,}12}\right)}\right)^{\frac{n}{0{,}12}}}_{\substack{\text{nærmer seg } e \\ \text{når } n \to \infty}}\Bigg]^{0{,}12} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{0{,}12}$$

så $1000 \cdot \left(1+\frac{0{,}12}{n}\right)^{n} \longrightarrow 1000 \cdot e^{0{,}12}$

Etter 1 år med 12 % nominell rente og <u>kontinuerlig</u> <u>forrentning</u> har innskuddet på 1000 vokst til

$$1000 \cdot e^{0{,}12} \doteq 1127{,}50$$

den årlige vekstfaktoren med kontinuerlig forrentning og 12 % nominell rente

Den effektive renten er

$$e^{0,12} - 1 = 12,7497\%$$

Balansen etter 2 år :

$$1000 \cdot e^{0,12} \cdot e^{0,12} = 1000 \cdot (e^{0,12})^2$$

$$= 1000 \cdot e^{0,12 \cdot 2} = 1000 \cdot e^{0,24}$$

$$= \underline{\underline{1271,25}}$$

<u>Hjemmeoppgave</u> Du setter inn 10 mill på en konto med 2,8 % rente. Beregn balansen etter 5 år

a) Med årlig forrentning

b) Med kontinuerlig forrentning

c) Bestem den effektive renten når det er kontinuerlig forrentning.

Løsning:

a) Vekstfaktor (et år) : 1,028

Balanse etter 5 år : $10 \text{ mill} \cdot 1.028^5$

$= \underline{\underline{11.48 \text{ mill}}}$

b) Vekstfaktor (et år) : $e^{0,028} = 1,0284$

Balanse etter 5 år : $10 \text{ mill} \cdot (e^{0,028})^5$

$= 10 \text{ mill} \cdot e^{0,028 \cdot 5}$

$= 10 \text{ mill} \cdot e^{0,140}$

$= \underline{\underline{11,50 \text{ mill}}}$

c) Den effektive renten er

$e^{0,028} - 1 = 1,0284 - 1 = \underline{\underline{2,84\,\%}}$