MET 1181, 5. forelesning, 10. sept 2020, Runar Ile

Plan
1. Lineære og kvadratiske likninger
2. Likninger med parametere : abc-formelen
3. Fullføre kvadratet
4. Likninger med gitte løsninger

1. Lineære og kvadratiske likninger

Et lineært uttrykk $\quad ax+b \quad$ (a og b er tall, $a \neq 0$)

Eks $\quad 4x-3 \quad (a=4,\ b=-3)$

En lineær likning : En likning som kan gjøres om til en likning $\underbrace{ax+b=0}_{\text{standardform til en lineær likning}}$ $\quad (a \neq 0)$

Eks Likningen $\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{2}{x+4} \quad \Big| \cdot (x+3)(x+4)$ mult. med fellesnevner

gir $\quad x+4 = 2\cdot(x+3)$

distr. lov gir $\quad x+4 = 2x+6$

trekker fra $2x+6$ på begge sider (b.s.)

$$-x-2=0 \qquad (a=-1,\ b=-2)$$

$$(x \neq -3,\ x \neq -4)$$

Et kvadratisk uttrykk : $\quad ax^2+bx+c$

hvor a, b, c er tall og $a \neq 0$

En kvadratisk likning : En likning som kan skrives på standardformen $\quad ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$

Eks Likningen $3x+9 = (x-1)(x+3)$

– løser opp parantesene

$$3x+9 = x^2+3x-x-3$$

– trekker $3x+9$ fra b.s.

$$0 = x^2-x-12$$

– akkurat det samme som

$$x^2-x-12=0 \quad (a=1,\ b=-1,\ c=-12)$$

Eks Likningen $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=3 \quad \Big|\cdot x\cdot(x+1)$

$$x+1+2x = 3x(x+1)$$

løser opp og trekker sammen

$$3x+1 = 3x^2+3x$$

trekker fra $3x+1$ på bs:

$$3x^2-1=0 \quad (a=3,\ b=0,\ c=-1)$$

$$(x\neq 0,\ x\neq -1)$$

---

2. Likninger med parametere: abc-formelen

Hvis $a\neq 0$ gir abc-formelen løsningene til alle kvad. likninger på std. formen $ax^2+bx+c=0$

Nemlig, $x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Eks $3x^2+4x-5=0 \quad (a=3,\ b=4,\ c=-5)$

abc-formelen gir løsningene:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 3\cdot(-5)}}{2\cdot 3}$$

$$= \frac{-\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{6}_{\,3}} \pm \frac{\sqrt{16+60}}{6} = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{76}}{6}$$

$$= -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{4\cdot 19}}{6} = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{19}}{6}$$

$$= -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3}$$

Tre tilfeller:

$b^2-4ac>0$ gir to løsninger

$b^2-4ac=0$ gir én løsning

$b^2-4ac<0$ gir ingen løsning

Oppgave Bestem antall løsninger

a) $x^2+5x+4{,}6=0$ $\qquad 5^2-4\cdot 1\cdot 4{,}6>0$: to løsn.

b) $-x^2+2x-1=0$ $\qquad 2^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=0$: én løsn.

c) $4x^2-5x-5=0$ $\qquad (-5)^2-4\cdot 4\cdot(-5)>0$: to løsn.

abc-formelen er ofte lite effektiv:

Eks Likningen $-3x^2+7=0$ $(a=-3,\ b=0,\ c=7)$

$$-3x^2=-7 \quad | :(-3)$$

$$x^2=\frac{-7}{-3}=\frac{7}{3}$$

$$|x|=\sqrt{x^2}=\sqrt{\frac{7}{3}}$$

dvs $\underline{\underline{x=\sqrt{\frac{7}{3}}}}$ eller $\underline{\underline{x=-\sqrt{\frac{7}{3}}}}$

Eks Likningen $2x^2-6x=0$ $(a=2,\ b=-6,\ c=0)$

$$2(x^2-3x)=0 \quad | : 2$$

$$x^2-3x=0$$

$$x\cdot(x-3)=0$$

Dvs, enten $\underline{\underline{x=0}}$ eller $x-3=0$

$$\underline{\underline{x=3}}$$

Mønster

Hvis $a\cdot b=0$ så er enten $a=0$ eller $b=0$
(eller begge lik 0)

3. Fullføre kvadratet

Eks Likningen $\underbrace{x^2+6x}\ -16 = 0$

Påstand: $x^2+6x = (x+3)^2 - 9$ ($:2$)

– fordi $(x+3)^2 = x^2+2\cdot 3x+3^2 = x^2+6x+9$

så $(x+3)^2-9 = x^2+6x$

$$\underbrace{(x+3)^2-9}\ -16 = 0$$

$$(x+3)^2 = 25$$

dvs enten $x+3=5$ eller $x+3=-5$

$\underline{\underline{x=2}}$ eller $\underline{\underline{x=-8}}$

Oppgave Løs de kvadratiske likningene ved å fullføre kvadratet.

a) $x^2-8x-33=0$

b) $x^2+2x=63$

Løsningene

a) $\frac{-8}{2}=-4$, så $x^2-8x=(x-4)^2-(4)^2$

gir ny likning: $(x-4)^2-16-33=0$

dvs $(x-4)^2=49$ dvs

enten $x-4=7$ eller $x-4=-7$

dvs $\underline{\underline{x=11}}$ eller $\underline{\underline{x=-3}}$

b) $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1^2$

så ny likning: $(x+1)^2 - 1 = 63$

dvs $(x+1)^2 = 64$

dvs $x+1 = 8$ eller $x+1 = -8$

dvs $\underline{\underline{x = 7}}$ eller $\underline{\underline{x = -9}}$

---

4. Likninger med gitte løsninger

Hvis r_1 og r_2 er løsninger („røtter") til en kvadratisk likning $x^2+bx+c=0$

så er $(x-r_1)(x-r_2) = x^2 - r_2x - r_1x + r_1r_2$

$= x^2 - (r_1+r_2)x + r_1r_2$

Så da er $b = -(r_1+r_2)$ og $c = r_1r_2$

Eks $x^2+6x-16 = (x-2)(x+8)$

Oppg Bestem uttrykket x^2+bx+c med følgende røtter:

a) 1 og 2 gir $(x-1)(x-2) = x^2-3x+2$

b) 11 og -3 gir $(x-11)(x+3) = x^2-8x-33$

Eks $3(x-1)(x-2) = 3x^2-9x+6$