MET1181, 6. forelesning, 17. sept 2020, Runar Ile

Plan 1. Polynomdivisjon og faktorisering
2. Rasjonale og irrasjonelle likninger
3. Ulikheter

1. Polynomdivisjon og faktorisering

Vil dividere et polynom $f(x)$ med et annet polynom $g(x)$ og få et polynom $q(x)$ med rest $r(x)$.

$$g(x)\cdot \Big| \quad \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad \text{med } \operatorname{grad}(r(x)) < \operatorname{grad}(g(x))$$

får $f(x) = q(x)\cdot g(x) + r(x)$

Eks $f(x) = 3x^2+2x+1$ og $g(x) = x-2$

$$(\boxed{3x^2}+2x+1) : (\boxed{x}-2) = \overset{3x^2:x}{\overset{\shortparallel}{3x}} + \overset{8x:x}{\overset{\shortparallel}{8}} + \frac{17}{x-2}$$

$$\begin{array}{l} -(3x^2-6x \qquad) \xleftarrow{\cdot(x-2)} \\ \hline \qquad \boxed{8x}+1 \\ \quad -(8x-16) \xleftarrow{\cdot(x-2)} \\ \hline \qquad\quad \boxed{17} \end{array}$$

kalles for <u>resten</u>

Så $q(x) = 3x+8$ og $r(x) = 17$

Sjekk: $\left(3x+8+\frac{17}{x-2}\right)\cdot(x-2)$

$= (3x+8)(x-2) + \frac{17}{\cancel{x-2}}\cdot\cancel{(x-2)}$

$= 3x^2+8x-6x-16+17 = 3x^2+2x+1 = f(x)$.

– så ok!

To anvendelser av polynomdivisjon.

A) Å finne asymptoter til rasjonale funksjoner

Eks $\dfrac{3x^2+2x+1}{x-2} = 3x+8+\dfrac{17}{x-2}$

har en vertikal asymptote: linjen $x=2$

og en skrå asymptote: linjen $y=3x+8$

B) Å faktorisére et polynom som et produkt av lineære (grad 1) polynomer.

Eks Faktorisér $x^3-4x^2-11x+30$ i lineære faktorer.

Løsning Tre steg.

Steg 1 Vi gjetter på en heltallsløsning (rot).

Jeg prøver $x=-3$: $(-3)^3-4\cdot(-3)^2-11\cdot(-3)+30$

$= -27-36+33+30=0$

Altså vil $(x-(-3)) = (x+3)$ være en faktor!

Steg 2 Bruker polynomdivisjon til å finne et polynom av lavere grad:

$$
\begin{array}{l}
(\boxed{x^3}-4x^2-11x+30):(\boxed{x}+3) = x^2-7x+10 \\
\underline{-(x^3+3x^2 \qquad\qquad)} \quad \leftarrow \cdot(x+3) \\
\qquad \boxed{-7x^2}-11x+30 \\
\qquad \underline{-(-7x^2-21x \qquad)} \quad \leftarrow \cdot(x+3) \\
\qquad\qquad \boxed{10x}+30 \\
\qquad\qquad \underline{-(10x+30)} \quad \leftarrow \cdot(x+3) \\
\qquad\qquad\qquad 0 \quad \text{(rest)}
\end{array}
$$

Dette betyr at $x^3-4x^2-11x+30=(x+3)(x^2-7x+10)$

Steg 3 Vi finner røttene til $x^2-7x+10$.

De er $\underline{x=2}$ og $\underline{x=5}$

så: $x^2-7x+10 = (x-2)(x-5)$

og $x^3-4x^2-11x+30 = \underline{\underline{(x+3)(x-2)(x-5)}}$

Merk 1: Heltallsroten må dele 30.

Merk 2: Det går ikke alltid å faktorisere.

Eks x^2+5 har ikke røtter

x^2+2x+3 —— " —— fordi $b^2-4ac = 2^2-4\cdot1\cdot3<0$

Merk 3 Det kan være vanskelig (umulig) å gjette på en rot!

2. Rasjonale og irrasjonale likninger

En rasjonal likning $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$

$p(x)$ og $q(x)$ er polynomer.

Eks $\frac{x+1}{(x-1)(x+3)} = 0$. Da $x+1 = 0$ og $(x-1)(x+3) \neq 0$ dvs $x \neq 1$, $x \neq -3$

Eks $\frac{x+1}{(x-1)(x+3)} = 2 \quad \Big| \cdot (x-1)(x+3)$

- da må $x \neq 1$, $x \neq -3$

$$x+1 = 2(x-1)(x+3)$$

løser opp og trekker sammen

$$x+1 = 2(x^2+2x-3) = 2x^2+4x-6$$

$$2x^2+3x-7 = 0 \quad (\text{med } x \neq 1,\ x \neq -3)$$

som du kan løse.

Irrasjonelle likninger

- den ukjente står under roten!

Eks $2\sqrt{x+1} = x-2$

kvadrerer begge sider

$$4(x+1) = x^2-4x+4$$

$$4x+\cancel{4} = x^2-4x+\cancel{4}$$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x-8) = 0$$

$\underline{x = 0}$ eller $\underline{x = 8}$

Merk: Disse trenger ikke være løsninger på den opprinnelige likningen.
Vi må teste kandidatene.

$\underline{x=0}$ v.s. $2\cdot\sqrt{0+1} = 2\cdot\sqrt{1} = 2\cdot 1 = 2$
h.s. $0 - 2 = -2$
ikke like, $x=0$ er ikke en løsn.

$\underline{x=8}$ v.s. $2\cdot\sqrt{8+1} = 2\cdot\sqrt{9} = 2\cdot 3 = 6$
h.s. $8 - 2 = 6$
er like, så $\underline{\underline{x=8}}$ er eneste løsn.

---

3. Ulikheter

$-2 < -1$ leses: „minus to er mindre enn minus en"

$\frac{1}{9} > \frac{1}{12}$ leses: „en nidel er større enn en tolvdel"

Også $\leq$ og $\geq$.

En ulikhet er en påstand om at et uttrykk er mindre enn / større enn ... enn et annet uttrykk (tall)

Eks $x - 1 \geq 2$

- er sant hvis $x = 5$ fordi $5 - 1 \geq 2$
- er usant hvis $x = 2$ fordi $2 - 1 \ngeq 2$
  ikke er sant!

Løsningene på ulikheten er de verdiene av x som gjør ulikheten sann!

- typisk uendelig mange tall!

I eks er løsningene $\underline{\underline{x \geq 3}}$

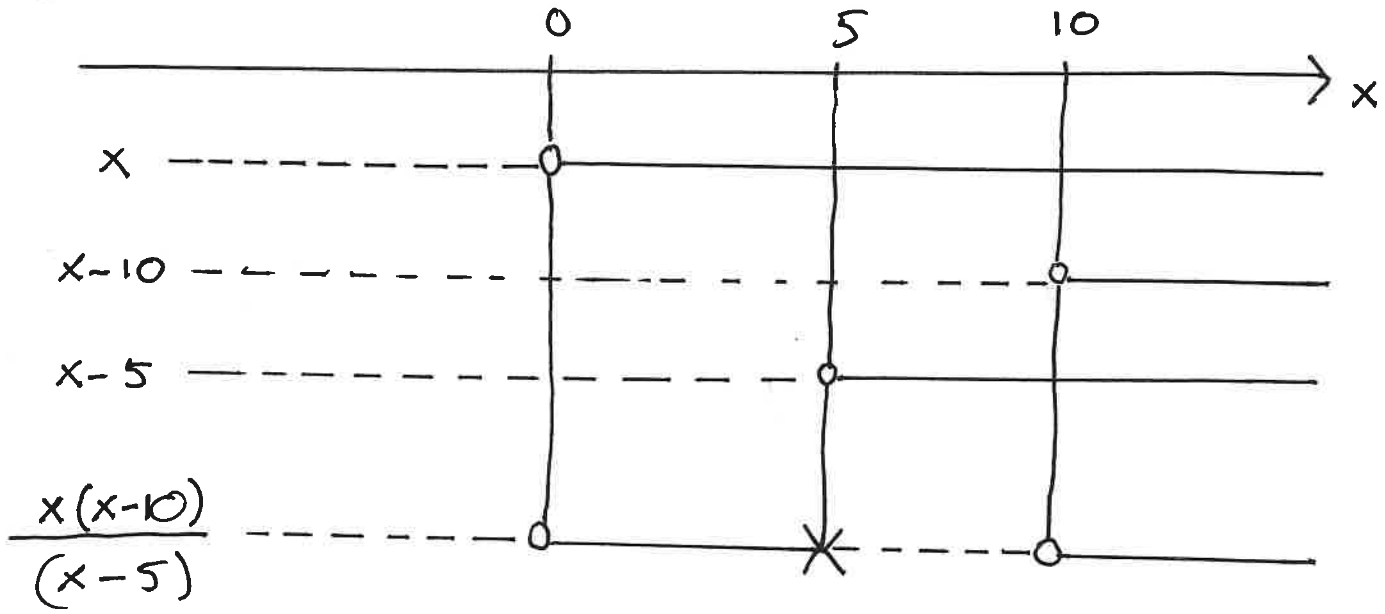
Kan skrive disse løsningene slik:

$$\underline{\underline{x \in [3, \infty\rangle}}$$

$$\underline{\underline{x \in [3, \rightarrow\rangle}}$$

Eks Løs ulikheten $\dfrac{x(x-10)}{(x-5)} \geq 0$

Løsning Fordi vi har 0 på h.s. og én ferdig faktorisert brøk på v.s. kan vi bruke fortegnsskjema.



dvs $\underline{\underline{0 \leq x < 5 \quad \text{eller} \quad x \geq 10}}$

alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in [0, 5\rangle \quad \text{eller} \quad x \in [10, \infty\rangle}}$