MET1181, 8. forelesning, 1. okt. 2020, Runar Ile

Plan
1. Voksende og avtagende funksjoner
2. Sirkler og ellipser
3. Polynomfunksjoner

---

1. Voksende og avtagende funksjoner

Eks $f(x) = 0{,}03x^2 + 8x - 1500$, $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ (dvs $x \geq 0$)

Er $f(x)$ voksende?
Er $f(x)$ avtagende?
– eller ingen av delene?

Kan se på GeoGebra (el.)

eller vi kan finne symmetriaksen ved å fullføre kvadratet.

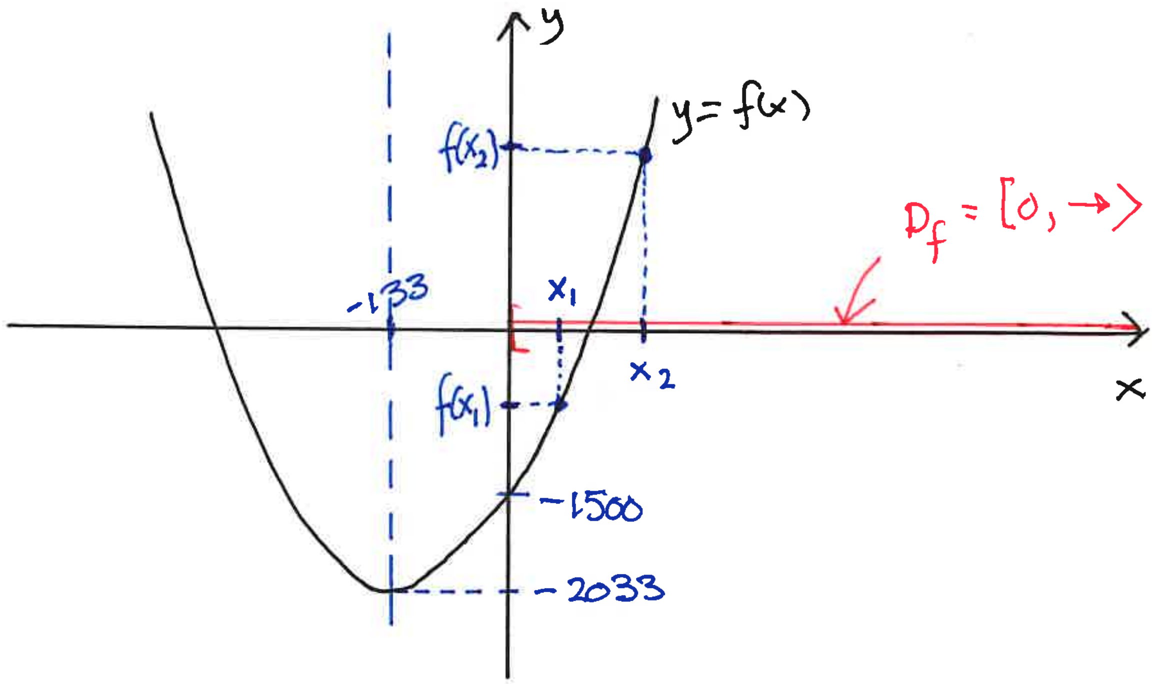
$$f(x) = 0{,}03\left[x^2 + \frac{800}{3}x\right] - 1500$$

$$= 0{,}03\left[\left(x + \frac{800}{6}\right)^2 - \left(\frac{800}{6}\right)^2\right] - 1500$$

$$= 0{,}03\left(x + \frac{800}{6}\right)^2 - \frac{6100}{3}$$

Symmetriaksen: $x = -\frac{800}{6} \approx -133$ (y fri)

Minimumsverdien: $y = f\left(-\frac{800}{6}\right) = -\frac{6100}{3} \approx -2033$



Fordi symmetriaksen ligger til venstre for $x = 0$, er $f(x)$ voksende i hele sitt definisjonsområde.

<u>Definisjon</u> En funksjon $f(x)$ er <u>voksende</u> hvis for alle $x_1 < x_2$ så gjelder

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

<u>Eks</u> $f(x) = 2x + 5$ er voksende for alle x.

Fordi: Anta $x_1 < x_2$

multipliserer med 2 på begge sider

$$2x_1 < 2x_2$$

legger til 5 på b.s.

$$f(x_1) = 2x_1 + 5 < 2x_2 + 5 = f(x_2)$$

Altså er $f(x)$ (strengt) voksende.

Definisjon En funksjon $f(x)$ er **avtagende** hvis for alle $x_1 < x_2$ så gjelder

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Oppg Vis at $f(x) = -2x + 5$ er (strengt) avtagende

Løsning Anta $x_1 < x_2$ $\quad | \cdot (-2)$

$$-2x_1 > -2x_2$$

Legger til 5 på b. s.

$$f(x_1) = -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 = f(x_2)$$

så $f(x)$ er strengt avtagende.

Oppg Vi har konstantfunksjonen $f(x) = 5$. Avgjør om $f(x)$ er voksende/avtagende/ingen av delene.

Løsning

Voksende: Hvis $x_1 < x_2$ så vil $f(x_1) = 5 \leq 5 = f(x_2)$

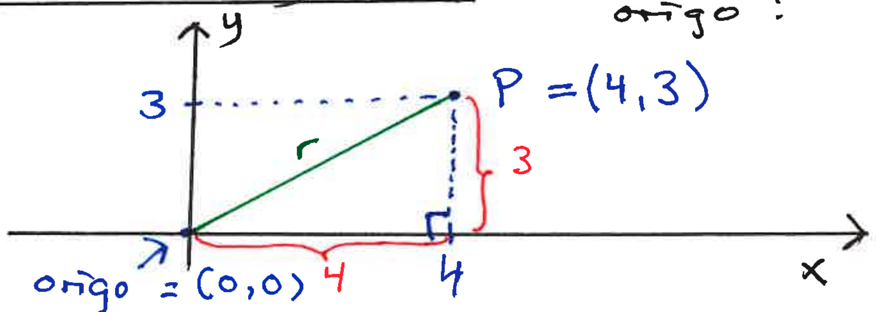
Avtagende: Hvis $x_1 > x_2$ så vil $f(x_1) = 5 \geq 5 = f(x_2)$

Men $f(x)$ er ikke strengt voksende og ikke strengt avtagende.

---

2. Sirkler og ellipser

Hva er avstanden mellom et punkt og origo?



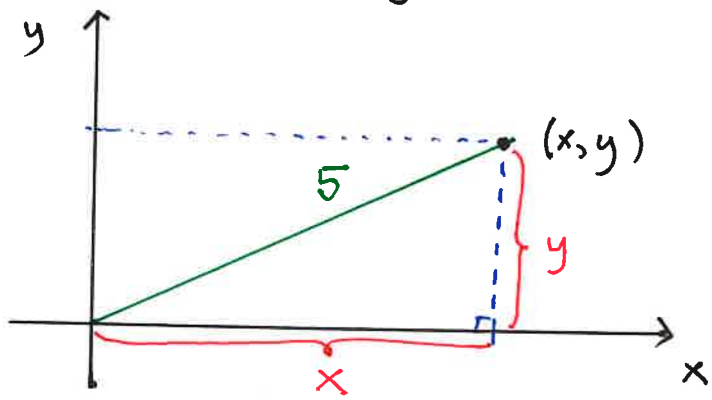
Pytagoras:

$r^2 = 4^2 + 3^2 \quad (r \geq 0)$

$r^2 = 16 + 9 = 25$

$r = \sqrt{25} = 5$

Anta punktet (x, y) ligger 5 fra origo.
Hva er likningen?



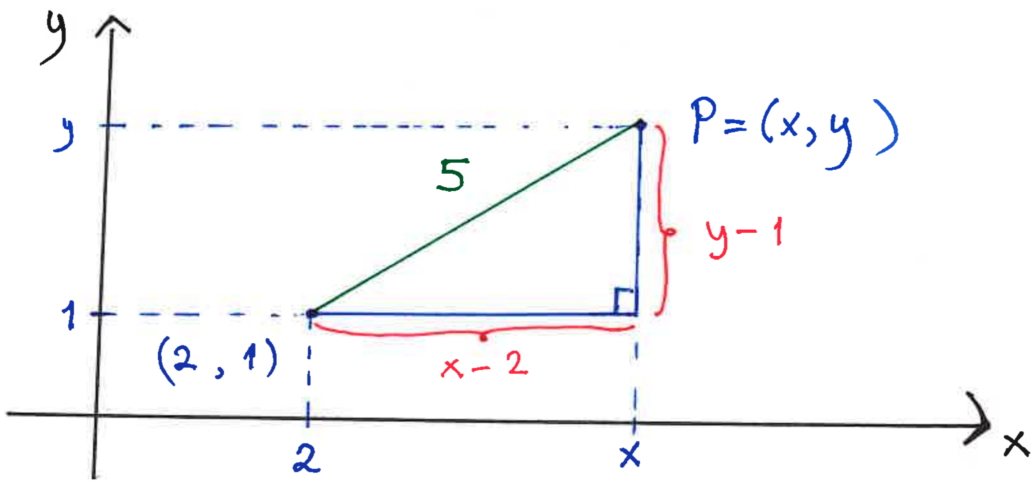
Pytagoras:

$$5^2 = x^2 + y^2$$

- én likning med to ukjente
- uendelig mange løsninger

Løsningene er alle punkter i planet med avstand 5 fra origo, som kalles sirkelen med radius 5 og sentrum i origo.

<u>Eks</u> Hva er likningen til punktene på en sirkel med radius 5 og sentrum $(2, 1)$?



Pytagoras:

$$5^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$$

$$25 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

dvs

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$$

Oppg Bestem radius og sentrum i sirkelen.

a) $x^2 + (y+5)^2 = 10$

b) $x^2 + y^2 - 2x + 6y = -9$

Løsninger

a) Sentrum: $\underline{\underline{(0, -5)}}$, radius: $\underline{\underline{\sqrt{10}}}$

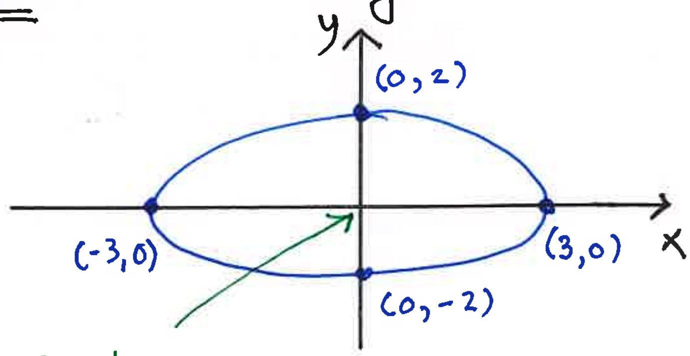
b) $$\underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1} + \underbrace{(y+3)^2}_{y^2+3y+9} = -9 + 1^2 + 3^2 = 1$$

Sentrum: $\underline{\underline{(1, -3)}}$, radius: $\sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$

Ellipser

Eks $4x^2 + 9y^2 = 36$

x	3	-3	0	0
y	0	0	2	-2



sentrum = origo

Deler b.s. av likningen med 36 :

$$\frac{1}{9} : \; \frac{4}{36} x^2 + \frac{9}{36} y^2 = 1 \quad : \frac{1}{4}$$

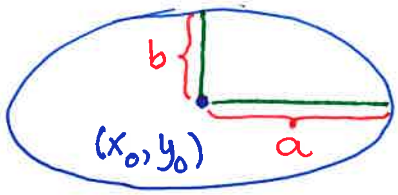
$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

Dette minner om en sirkel-likning, men x-aksen er strukket med faktor 3 og y-aksen er strukket med faktor 2.

Generelt kan alle ellipser skrives som løsningsmengden til en likning på formen

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Her er (x_0, y_0) sentrum i ellipsen og

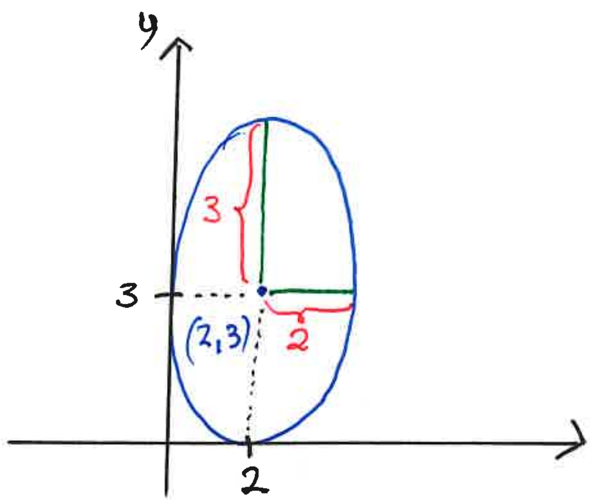


a og b er horisontal og vertikal halvakse.

<u>Eks</u> $$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

sentrum: $(2, 3)$

halvakser: $a = \sqrt{4} = 2$ og $b = \sqrt{9} = 3$



3. Polynomfunksjoner

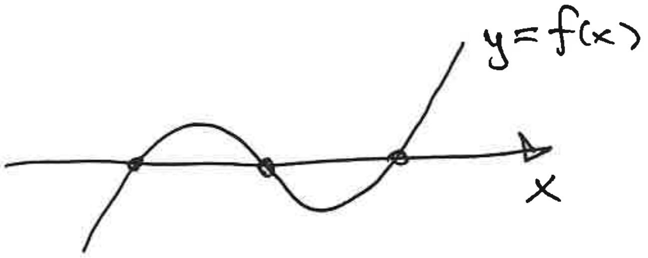
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

er en polynomfunksjon av grad n hvis $a_n \neq 0$.

Den har maksimalt n røtter (nullpunkter)

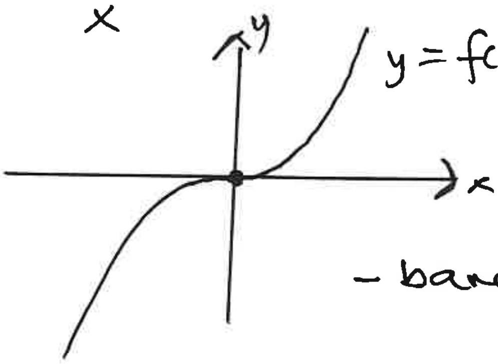
Hvis graden er et oddetall har den alltid minst en rot.

Eks



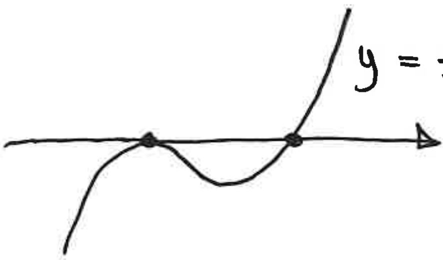
har grad 3

Eks $f(x) = x^3$



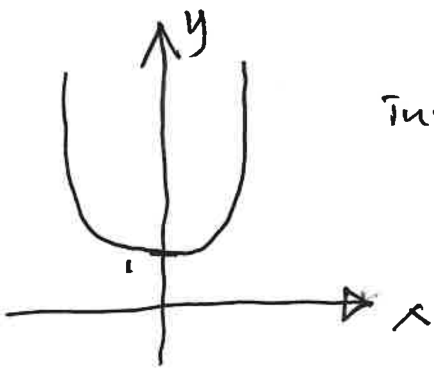
– bare én rot!

Eks



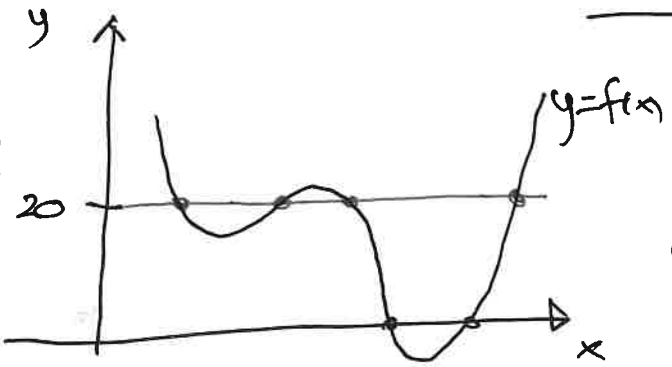
$y = f(x)$ har grad 3

Eks $f(x) = x^4 + 1$



Ingen røtter

Eks



$f(x) = 20$ har 4 løsninger

dvs $f(x) - 20 = 0$ —"—

så $f(x)$ har grad minst 4.