MET 1181, 9. forelesning, 5. okt. 2020, Runar Ile

Plan
1. Rasjonale funksjoner og asymptoter (kap 3.9)
2. Hyperbler (kap 3.9)
3. Kontinuitet og skjæringssetningen (kap 3.10)

1. Rasjonale funksjoner og asymptoter

Rasjonal funksjon $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ ← er polynomer

Eks $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+3}$

Skal finne en asymptote.
– deler på x^2 i teller og nevner

Fordi $f(x) = \dfrac{\frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \dfrac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} \xrightarrow[x \to \infty]{} \dfrac{0}{1} = 0$

(eller $x \to -\infty$)

$$f(1000) = \frac{\frac{2}{1000} + \frac{1}{1000^2}}{1 + \frac{3}{1000^2}} = 0{,}00200099\ldots$$

Dette betyr at linjen $y = 0$ (x fri)
– dette er x-aksen
er en horisontal asymptote for $f(x)$.

Eks $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x-5)}$ $\quad (x \neq 1,\ x \neq 5)$

Hvis $x \to 1^-$ „ x nærmer seg 1 nedenfra"
0,9 0,99 0,999 ...

Da vil $x - 1 \to 0^-$ „ x nærmer seg 0 nedenfra

og $x - 5 \to -4^-$

og $2x + 1 \to 3^-$

Dermed vil $f(x) = \dfrac{\overbrace{(2x+1)}^{\to 3^-}}{\underbrace{(x-1)}_{\to 0^-} \cdot \underbrace{(x-5)}_{-4^-}} \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$

Hvis $x \longrightarrow 1^+$ „ x nærmer seg 1 fra oversiden"

Da vil $x-1 \longrightarrow 0^+$

$x-5 \longrightarrow -4^+$

$2x+1 \longrightarrow 3^+$

Dermed vil $f(x) = \dfrac{\overbrace{(2x+1)}^{3^+}}{\underbrace{(x-1)}_{0^+} \cdot \underbrace{(x-5)}_{-4^+}} \xrightarrow[x \to 1^+]{} -\infty$

<u>Konklusjon</u> Linjen $x = 1$ (y fri) er en vertikal asymptote for $f(x)$.

Tilsvarende: $f(x) \xrightarrow[x \to 5^+]{} +\infty$

og $f(x) \xrightarrow[x \to 5^-]{} -\infty$

Altså er linjen $x = 5$ (y fri) en vertikal asymptote for $f(x)$.

NB: $f(x)$ har også en horisontal asymptote $y = 0$ (x fri).

Skrå asymptoter

Eks $f(x) = x - 5 + \dfrac{2}{x-4}$ har vertikal asymptote $x = 4$ (y fri).

Setter $g(x) = x - 5$.

Da gir $y = g(x)$ (grafen til $g(x)$) en skrå asymptote for $f(x)$ fordi

$$f(x) - g(x) = \frac{2}{x-4} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

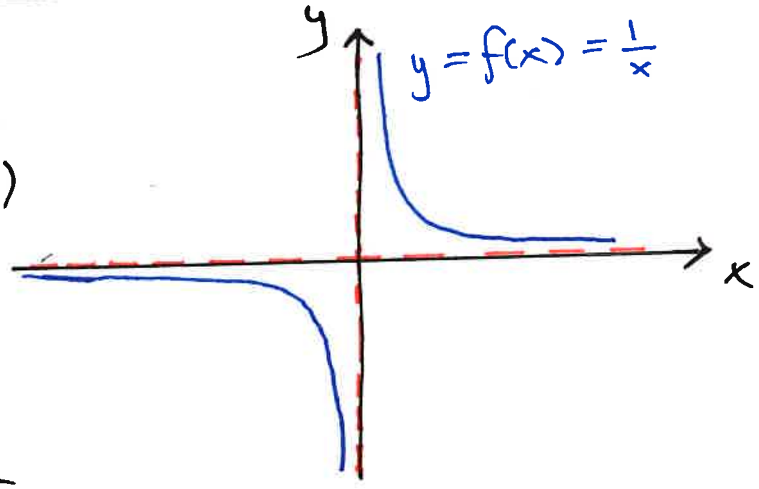
NB: $f(x) = \dfrac{(x-5)(x-4)+2}{(x-4)} = \dfrac{x^2 - 9x + 22}{x-4}$

– bruker polynomdivisjon for å få formen $x - 5 + \dfrac{2}{x-4}$.

---

2. Hyperbler

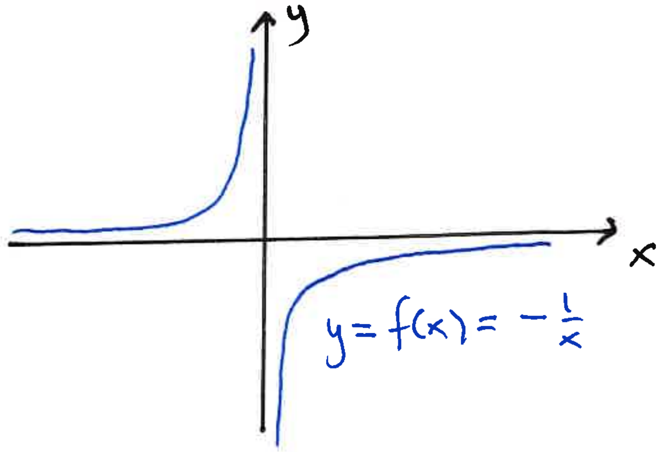
Eks $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$



Linjen $x = 0$ (y fri) er en vertikal asymptote for $f(x)$

Linjen $y = 0$ (x fri) er en horisontal asymp. for $f(x)$.

$f(x) = -\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$



<u>Definisjon</u> En funksjon $f(x)$ er en hyperbelfunksjon hvis den kan skrives på formen

$$f(x) = c + \frac{a}{x-b}$$

<u>Eks</u> $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$ er en hyperbelfunksjon

fordi polynom divisjon gir:

$$(3x-5) : (x-2) = 3 + \frac{1}{x-2}$$
$$\frac{-(3x-6)}{1}$$

$\cdot (x-2)$

så $c = 3$
$b = 2$
$a = 1$

Så $f(x) = 3 + \frac{1}{x-2} \quad (x \neq 2)$

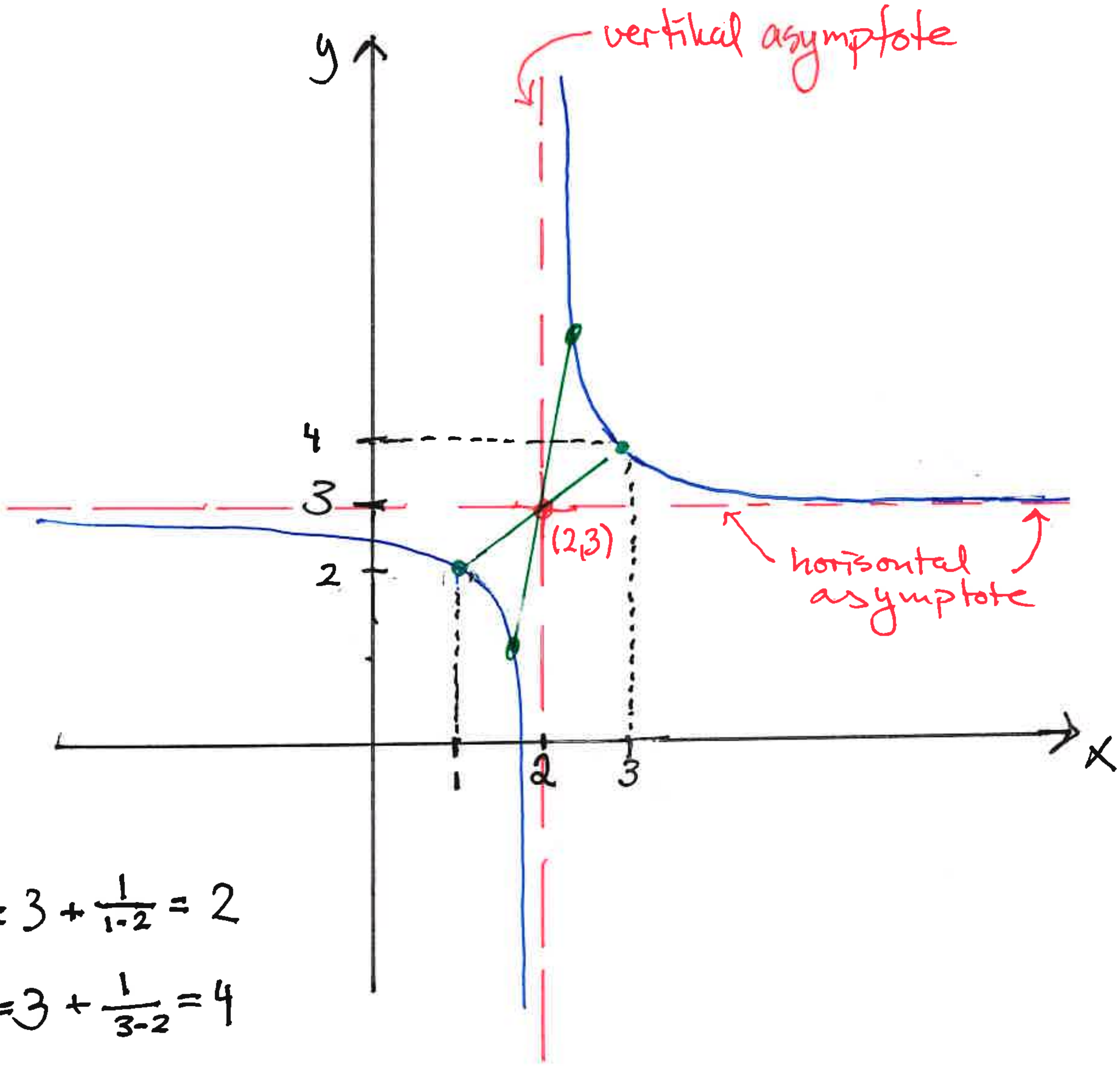
Vi har $3 + \frac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to 2^-]{} -\infty$

og $3 + \frac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to 2^+]{} +\infty$

så linjen $x = 2$ er en vertikal asymptote for $f(x)$.

Dessuten $\quad 3 + \underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\to 0} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 3$

så linjen $y = 3$ er en horisontal asymptote for $f(x)$.



$f(1) = 3 + \frac{1}{1-2} = 2$

$f(3) = 3 + \frac{1}{3-2} = 4$

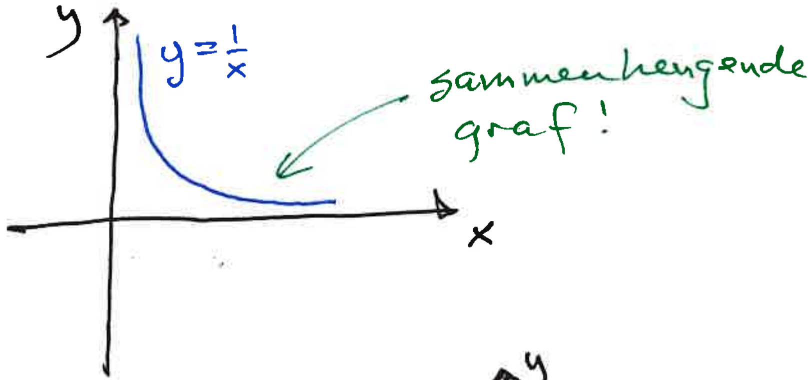
Grafen er symmetrisk om skjærings-punktet til asymptotene!

3. Kontinuitet og skjæringssetningen

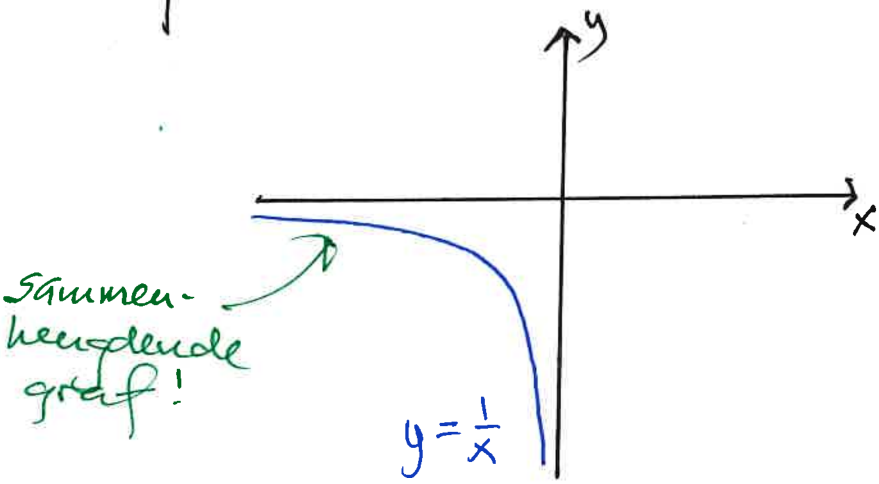
En funksjon er <u>kontinuerlig</u> hvis grafen er sammenhengende for alle intervaller i definisjonsområdet.

Eks $f(x) = \frac{1}{x}$ er definert for $x \neq 0$
dvs for $x \in \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$

For $x \in \langle 0, \rightarrow \rangle$:



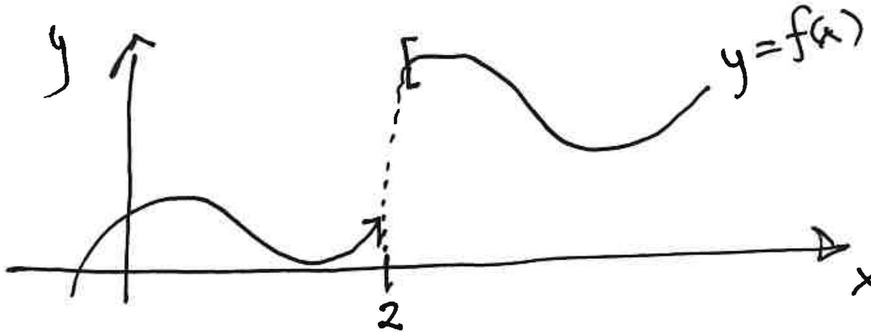
For $x \in \langle \leftarrow, 0 \rangle$:



Altså er $f(x) = \frac{1}{x}$ kontinuerlig.

Alle „vanlige" funksjoner er kontinuerlige.

Hvis grafen til $f(x)$ „hopper" er $f(x)$ <u>ikke</u> kontinuerlig:

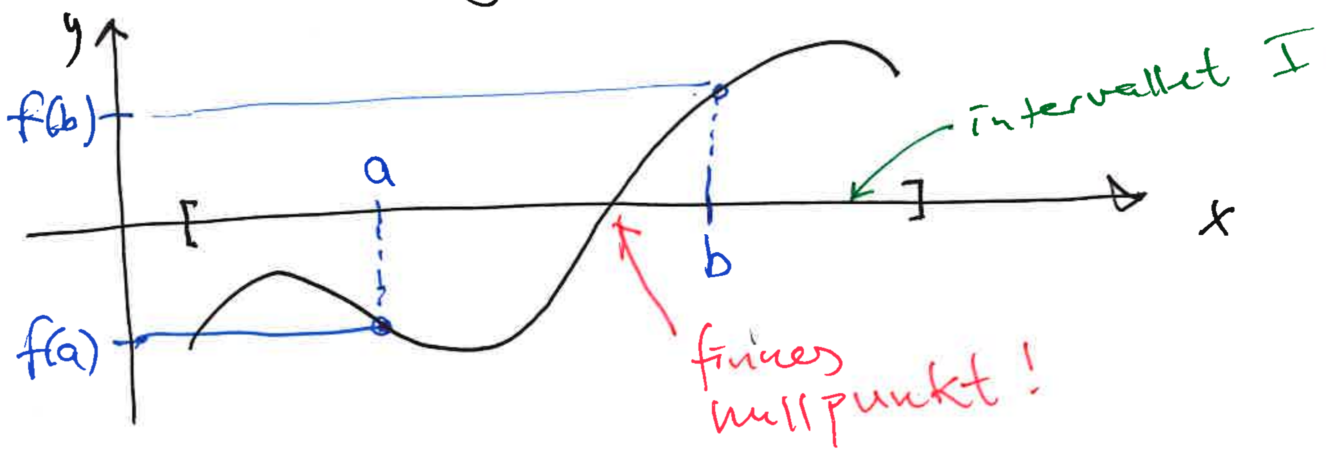


Skjæringssetningen

Hvis $f(x)$ er kontinuerlig i et intervall I og a og b ligger i I med

$f(a) < 0$ og $f(b) > 0$

så finnes det et nullpunkt for $f(x)$ mellom a og b.



Eks $f(x) = x\sqrt{2x+5} - \frac{10}{x}$ har et nullpunkt mellom $x = 1$ og $x = 10$ fordi

- $f(1) = 1 \cdot \sqrt{2 \cdot 1 + 5} - \frac{10}{1} = \sqrt{7} - 10 < 0$
- $f(10) = 10 \cdot \sqrt{2 \cdot 10 + 5} - \frac{10}{10} = 10 \cdot 5 - 1 > 0$
- $f(x)$ er kontinuerlig for $x > 0$ („vanlig funksjon definert for $x>0$")

Da gir skjæringssetningen at det finnes et nullpunkt mellom 1 og 10.