Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Avgjør hvor mange løsninger de lineære systemene har for ulike verdier av parameteren a.

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & az & = & 0 \\ 2x & - & ay & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \end{array} \qquad b)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & ay & - & z & = & a-5 \\ -x & + & 2y & + & az & = & -3 \\ ax & - & y & + & 2z & = & a+10 \end{array}$$

Oppgave 2.
Vi starter med en kvadratisk matrise A, og kommer fram til en ny matrise B ved å gjøre en elementær radoperasjon. Er det alltid slik at $|A| = |B|$? Begrunn hvorfor/hvorfor ikke, og gi eksempler.

Oppgave 3.
Bestem når systemet har eksakt én løsning, og bruk Kramers regel til å finne løsningene i disse tilfellene:

$$a)\quad \begin{array}{rcrcl} x & + & ay & = & 3 \\ ax & + & 4y & = & 1 \end{array} \qquad b)\quad \begin{array}{rcrcl} ax & + & y & = & 1 \\ -x & + & ay & = & 2 \end{array}$$

Oppgave 4.
Avgjør hvor mange løsninger det lineære systemet har for ulike verdier av parameteren a, og finn løsningene når systemet er konsistent:

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ ax & + & 4y & + & 3z & = & 25 \\ ax & + & y & - & z & = & 12 \end{array} \qquad b)\quad \begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & az & = & -3 \end{array}$$

Oppgave 5.
Vi ser på vektorene er gitt ved

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Tegn inn disse vektorene i et to-dimensjonal koordinatsystem. Regn så ut følgende vektorer, og tegn de inn i samme koordinatsystem:

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ b) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ c) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ d) $2\mathbf{u}$ e) $-\mathbf{v}$ f) $3\mathbf{u} + \mathbf{w}$

Oppgave 6.
Løs vektorlikningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$ for vektorene nedenfor. Er $\mathbf{b}$ en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Oppgave 7.
Skriv vektorlikningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$ på matriseform, og bruk dette til å løse likningen:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Oppgave 8.
Løs matriselikningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Oppgave 9.
Bestem alle (a,b,c,d) slik at vektoren $\mathbf{b}$ er en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ gitt nedenfor. Bruk dette til å avgjøre om $\mathbf{b}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ når $(a,b,c,d) = (0,0,1,1)$.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Oppgave 10.
Du har 400.000 kr og skal investere i en portefølje av verdipapirer. Du kan velge en kombinasjon av verdipapirene A, B, C med pris $p_A = 60$ kr, $p_B = 75$ kr og $p_C = 320$ kr per aksje på investeringstidspunktet. Vi antar at på et gitt tidspunkt i framtiden, vil ett av tre scenarier slå til. Prisene på verdipapirene i disse scenariene er gitt i tabellen nedenfor. Vi skriver x, y, z for antall aksjer du kjøper i hvert av de tre verdipapirene, og går for enkelhets

	Pris A	Pris B	Pris C
Kjøpskurs	60	75	320
Scenario 1	80	80	350
Scenario 2	100	25	500
Scenario 3	40	100	55

skyld ut i fra x,y,z kan være vilkårlige reelle tall. Vi tillater altså å kjøpe et negativt antall aksjer (short-salg), og antall aksjer trenger ikke være heltall.

a. Vi går ut i fra at betingelen $60x + 75y + 320z = 400.000$ er oppfyllt. Hva betyr denne betingelsen?

b. Vi skriver R_1, R_2 og R_3 for avkastningen til porteføljen (gevinsten) i de tre scenariene. Er det mulig å velge porteføljen slik at $(R_1, R_2, R_3) = (50.000, 25.000, -100.000)$? Hvilken portefølje må vi da velge?

c. Er det mulig å velge en portefølge av verdipapirer slik at $R_1 > 0$ og $R_2 = R_3 = 0$? Hvilken portefølje må vi da velge? Tolk svaret.

d. Beskriv alle talltripler (R_1,R_2,R_3) av mulige avkastninger i de tre scenariene. Finnes det noen porteføljer slik at $R_1, R_2, R_3 > 0$ (garantert gevinst i alle scenarier)?

Oppgave 11.
Oppgaver fra læreboken: 6.4.4 - 6.4.7, 6.5.2 - 6.5.3
Oppgaver fra oppgaveboken: 9.19 - 9.22, 9.24, 9.26

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
a) Uendelig mange løsninger for $a = \pm 1$, én løsning for $a \neq \pm 1$
b) Uendelig mange løsninger for $a = -1$, én løsning for $a \neq -1$

Oppgave 2.
Hvis vi kan komme fra A til B ved å legge til et multippel av en rad til en annen rad, så er $|A| = |B|$. Hvis vi bytter om to rader, så er $|B| = -|A|$. Hvis vi multipliserer en rad med $c \neq 0$, så er $|B| = c \cdot |A|$.

Oppgave 3.
a) $(x,y) = \left(\frac{12-a}{4-a^2}, \frac{1-3a}{4-a^2}\right)$ for $a \neq \pm 2$ b) $(x,y) = \left(\frac{a-2}{a^2+1}, \frac{2a+1}{a^2+1}\right)$ for alle a

Oppgave 4.

a) Ingen løsninger for $a = 7$, eksakt én løsning $(x,y,z) = \left(\frac{17}{a-7}, \frac{-a-61}{a-7}, \frac{4a+23}{a-7}\right)$ for $a \neq 7$.

b) Ingen løsninger for $a = 1$, uendelig mange løsninger $(x,y,z) = (z - 4/3, z - 5/3, z)$ med z fri for $a = -2$, og eksakt én løsning for $a \neq 1, -2$ gitt ved

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{a-1}, \frac{2}{a-1}, \frac{-3}{a-1}\right)$$

Oppgave 5.

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$

Oppgave 6.
Generell løsning er $(x,y,z) = (-4z-1, z+1, z)$ med z fri. En konkret løsning får vi ved å sette (for eksempel) $z = 0$, som gir $(-1,1,0)$, og det betyr at $\mathbf{b} = -1 \cdot \mathbf{v}_1 + 1 \cdot \mathbf{v}_2$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Oppgave 7.
For $a = -8$ er det uendelig mange løsninger $(x,y,z) = (-4z-1, z+1, z)$ med z fri (som i forrige oppgave). For $a \neq -8$ er det eksakt én løsning $(x,y,z) = (-1,1,0)$.

Oppgave 8.
Eksakt én løsning $(x,y,z) = (-3/2, 4, -1/2)$.

Oppgave 9.
Det er en lineærkombinasjon hvis $-7a + 9b - 5c + 3d = 0$, og $(a,b,c,d) = (0,0,1,1)$ svarer ikke til en lineærkombinasjon siden disse verdiene ikke oppfyller likningen.

Oppgave 10.

a. Dette er budsjettbetingelse, altså at total kostnad for aksjen vi kjøper er 400.000 kr.

b. Ja, om vi velger porteføljen $(x,y,z) = (1187\,{}^1\!/_2, 2250, 500)$.

c. Ja, om $R_1 = 80.000$. Vi må da velge porteføljen $(x,y,z) \approx (3333\,{}^1\!/_3, 2666\,{}^2\!/_3, 0)$. Dette betyr i så fall at vi kan investere uten å risikere tap, og med positiv forventet gevinst (en svært gunstig situasjon!).

d. De avkastningstripler (R_1,R_2,R_3) som er mulige å oppnå oppfyller likningen $5R_1 - 2R_2 - 2R_3 = 400.000$. Vi kan velge porteføljen slik at $R_1, R_2, R_3 > 0$ (altså garantert gevinst i alle scenarier, en enda gustigere situasjon!). For eksempel kan vi realisere avkastningen $R_1 = R_2 = R_3 = 400.000$.

Oppgave 11.

Fullstendig løsning finnes i oppgaveboken [O].