MET 1181, 15. forelesning, 18. nov. 2021, Runar Ile

Plan 1. l'Hôpitals regel

2. Grensekostnad, enhetskostnad, grenseinntekt

1. l'Hôpitals regel

Grenser av typen $\frac{0}{0}$ og $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Skrivemåte $\lim_{x \to 5} f(x)$ er tallet som $f(x)$ nærmer seg mer og mer når x nærmer seg 5 mer og mer.

Eks $f(x) = \frac{3x-3}{\ln(x)}$. Vil finne $\lim_{x \to 1} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{teller:} & 3x - 3 \xrightarrow[x \to 1]{} 3 \cdot 1 - 3 = 0 \\ \text{nevner:} & \ln(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \ln(1) = 0 \end{array}\right\} \text{Altså et } \frac{0}{0}\text{-uttrykk}$$

Da kan vi bruke l'Hôpitals regel for å komme videre:

$$\lim_{x \to 1} f(x) \overset{\text{l'Hôp.}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(3x-3)'}{[\ln(x)]'} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3}{\frac{1}{x}} = \frac{3}{\frac{1}{1}} = \underline{\underline{3}}$$

f.eks. $f(0{,}99) = \frac{3 \cdot 0{,}99 - 3}{\ln(0{,}99)} = 2{,}9850$

Deriverer teller og nevner for seg og prøver å finne grensen til den nye brøken.

<u>NB</u> Må være $\frac{0}{0}$ eller $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

<u>Eks</u> Bruk l'Hôpitals regel for å finne grensen

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1}$$

<u>Løsning</u> Teller : $x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Nevner : $e^x - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

så $\frac{0}{0}$-uttrykk.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} \overset{\text{l'Hôp.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

f.eks. $\frac{0{,}01}{e^{0{,}01} - 1} = 0{,}9950$

<u>Eks</u> $$\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}}_{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}}_{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \underline{0}$$

2. Grensekostnad, enhetskostnad, grenseinntekt

$K(x)$ er kostnaden ved å produsere x enheter.

$K'(x)$ er grensekostnadens funksjonen (marginal kostnad)

Tolkning Hva koster det å produsere én enhet mer enn x enheter?

$$= K(x+1) - K(x) = \frac{K(x+1) - K(x)}{1}$$

$$\approx \lim_{h \to 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h} = K'(x)$$

Hvorfor $K'(x)$? – mye enklere matematikk

$I(x)$ er inntekten ved å selge x enheter

$I'(x)$ er grenseinntekten —— " ——

Eks x = antall tonn laks solgt

$I'(50)$ = ekstra inntekt ved å selge ~~ett~~ tonn mer enn 50 tonn.

Profittfunksjonen (x = ant. produserte og solgte enheter)

$P(x) = I(x) - K(x)$

$P'(x)$ er grenseprofitten

<u>Enhetskostnaden</u> ved å produsere x enheter

er $A(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ „pris pr. enhet"

'average unit cost' – ikke konstant!

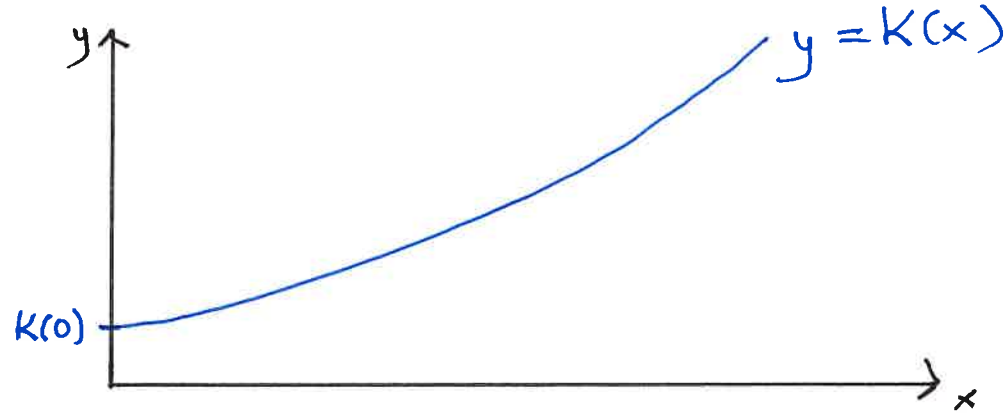
Start: 8.56

<u>Definisjon</u> $K(x)$ er en kostnadsfunksjon hvis

① $K(0) > 0$ (startkostnader)

② $K(x)$ er voksende ($K'(x) \geq 0$)

③ $K(x)$ er konveks ($K''(x) \geq 0$)



<u>Definisjon</u> Hvis $x = c$ er minimumspunkt for $A(x)$, kalles c for <u>kostnadsoptimum</u>

<u>Resultat</u> Hvis $K''(x) > 0$ for alle $x > 0$, så er kostnadsoptimum løsningen på likningen

$$K'(x) = A(x)$$

Eks $K(x) = x^2 + 200x + 160\,000$

Dette er en kostnadsfunksjon fordi

① $K(0) = 160\,000 > 0$

② $K'(x) = 2x + 200 > 0$ for $x > 0$.

③ $K''(x) = 2 > 0$ for alle x

så $K(x)$ er strengt konveks

Da er kostnadsoptimum løsningen på

likningen $2x + 200 = \dfrac{x^2 + 200x + 160\,000}{x}$

$$\cancel{2}x + \cancel{200} = \cancel{x} + \cancel{200} + \frac{160\,000}{x}$$

$$x = \frac{160\,000}{x} \quad \Big| \cdot x$$

$$x^2 = 160\,000$$

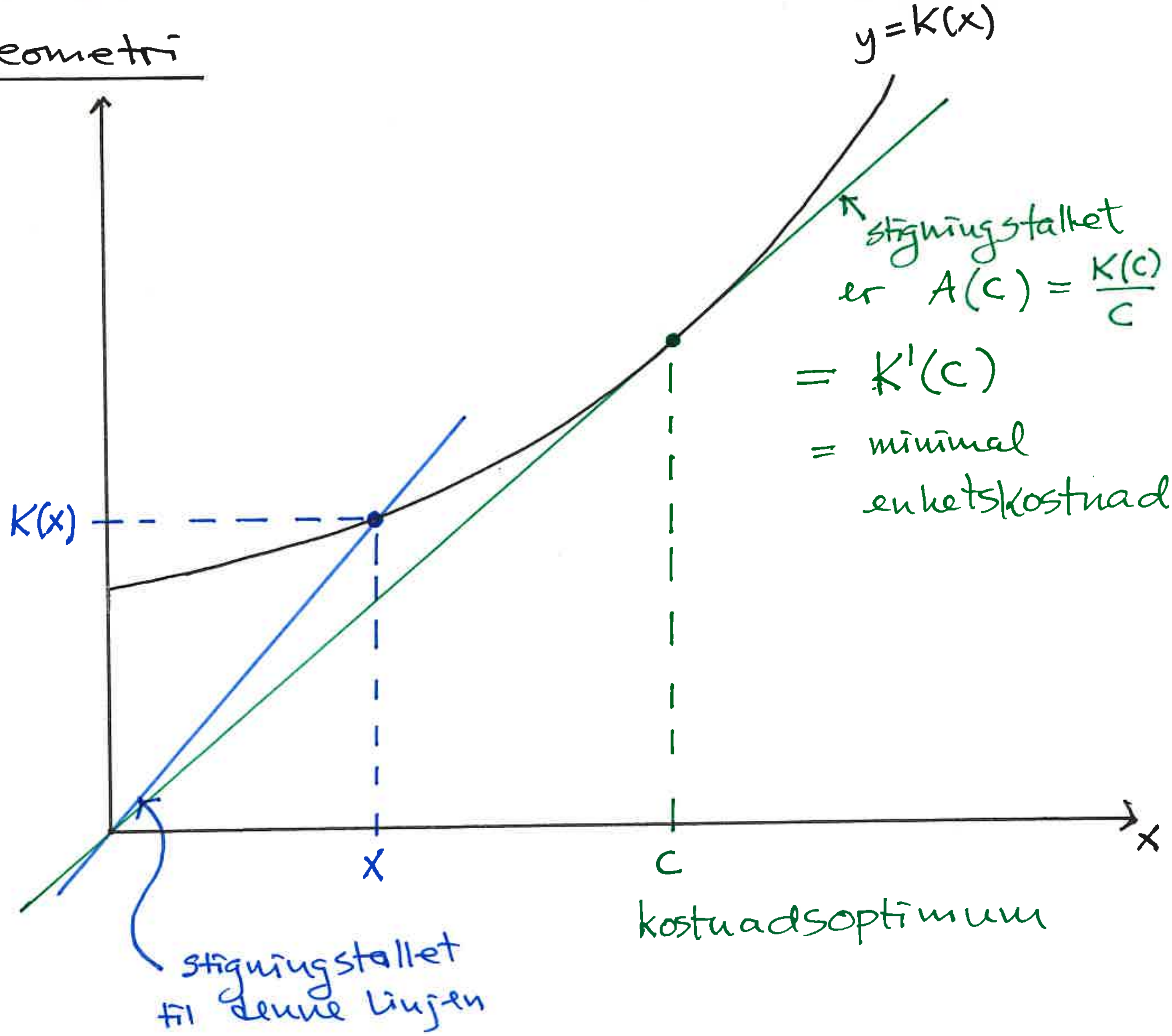
så $x = \sqrt{160\,000} = \underline{\underline{400}}$ (bare pos. x)

er kostnadsoptimum.

Minimal enhetspris:

$$A(400) = K'(400) = 2 \cdot 400 + 200 = \underline{\underline{1000}}$$

Geometri



er $\dfrac{K(x)}{x} = A(x)$

Så $A(c) = \dfrac{K(c)}{c} = K'(c)$ er

minimal enhetskostnad

= stigningstallet til tangenten

som går gjennom origo.

Algebraisk begrunnelse

Finner stasjonære punkter for $A(x) = \dfrac{K(x)}{x}$

$$A'(x) = \left[\frac{K(x)}{x}\right]' \qquad \text{brøkregel}$$

$$= \frac{K'(x)\cdot x - K(x)\cdot 1}{x^2} \qquad \left|\ \begin{matrix} :x \\ :x \end{matrix}\right.$$

$$= \frac{K'(x) - A(x)}{x}$$

Så $A'(x) = 0$ tilsvarer $K'(x) = A(x)$.

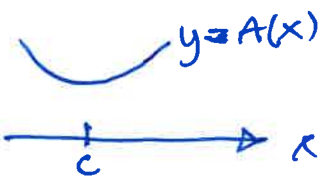
Anta $x = c$ er en løsning på denne likningen (dvs $x = c$ er stasjonært punkt for $A(x)$)

Vil bruke andrederiverttesten:

$$A''(x) = \frac{[K''(x) - A'(x)]\cdot x - [K'(x) - A(x)]\cdot 1}{x^2}$$

$$A''(c) = \frac{[K''(c) - \overbrace{A'(c)}^{=0}]\cdot c - [\overbrace{K'(c) - A(c)}^{=0}]}{c^2}$$

$$= \frac{K''(c)\cdot c}{c^2} = \frac{K''(c)}{c} > 0$$



$A(x)$ konveks ved $x = c$
og $x = c$ er et min.punkt.