MET 1181, 16. forelesning, 25. nov. 2021, Runar Ile

Plan
1. Elastisitet — kap 4.9
2. Lineær approksimasjon — kap 4.10
3. Taylorpolynomer — ″

1. Elastisitet

p = pris/enhet

$D(p)$ = etterspørsel hvis prisen er p
(= ant. solgte enheter)

Problemet med enheter

Eks Et fat Nordsjøolje koster \$ 82,52

En liter ——— ″ ——— NOK 4,62

Priselastisiteten til etterspørselen er

$$\varepsilon = \frac{\text{relativ etterspørselsendring}}{\text{relativ prisendring}}$$

Eks På en måned synker prisen på vare fra 12 tusen til 10 tusen og etterspørselen øker fra 50 mill. til 60 mill. Da er

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{60-50}{50}\right)}{\left(\frac{10-12}{12}\right)} = \frac{\left(\frac{10}{50}\right)}{\left(\frac{-2}{12}\right)} = \frac{120}{-100} = \underline{\underline{-1{,}2}}$$

Tolkning: Hvis prisen øker med 1% fra 12 tusen vil etterspørselen falle med 1,2%

Anta prisen endres fra p til $p+h$.

Da er relativ prisendring $\dfrac{p+h-p}{p} = \dfrac{h}{p}$

$$\frac{\text{relativ etterspørselsendring}}{\text{relativ prisendring}}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{D(p+h)-D(p)}{D(p)}\right)}{\left(\dfrac{h}{p}\right)} \quad \Bigg| \cdot \frac{p \cdot D(p)}{p \cdot D(p)} = 1$$

$$= \frac{D(p+h)-D(p)}{h} \cdot \frac{p}{D(p)}$$

$$\Big\downarrow h \to 0$$ (prisendringen nærmer seg 0)

$$\boxed{\varepsilon(p) = D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)}}$$

Dette er den momentane priselastisiteten til etterspørselsfunksjonen $D(p)$.

Sentralt spørsmål:

Vil inntekten gå opp eller ned hvis prisen øker litt?

Svar:

Inntekt $I(p) = p \cdot D(p)$

Marginalinntekten med hensyn på prisen er

$$I'(p) \overset{\text{prod.r.}}{=} 1 \cdot D(p) + p \cdot D'(p)$$

$$= D(p) \cdot \left[1 + \frac{p \cdot D'(p)}{D(p)}\right]$$

$$= \underbrace{D(p)}_{\text{alltid pos.}} \cdot \underbrace{\left[1 + \varepsilon(p)\right]}_{\text{pos. eller neg. ?}}$$

Hvis $\varepsilon(p) < -1$
får vi neg. $I'(p)$
så $I(p)$ er avtagende
– elastisk etterspørsel

Hvis $\varepsilon(p) > -1$
får vi pos. $I'(p)$
så $I(p)$ er voksende
– uelastisk etterspørsel

Hvis $\varepsilon(p) = -1$
er $I'(p) = 0$
$I(p)$ har stasjonært punkt
– nøytralelastisk etterspørsel

Eks $D(p) = 50 - p$ for $0 < p < 50$

Da er $D'(p) = -1$ og $\varepsilon(p) = \dfrac{D'(p) \cdot p}{D(p)} = \dfrac{(-1) \cdot p}{50 - p}$

$$= \frac{-p}{50-p}$$

Spørsmål: For hvilke p vil etterspørselen være elastisk?

Svar: Må løse ulikheten $\varepsilon(p) < -1$

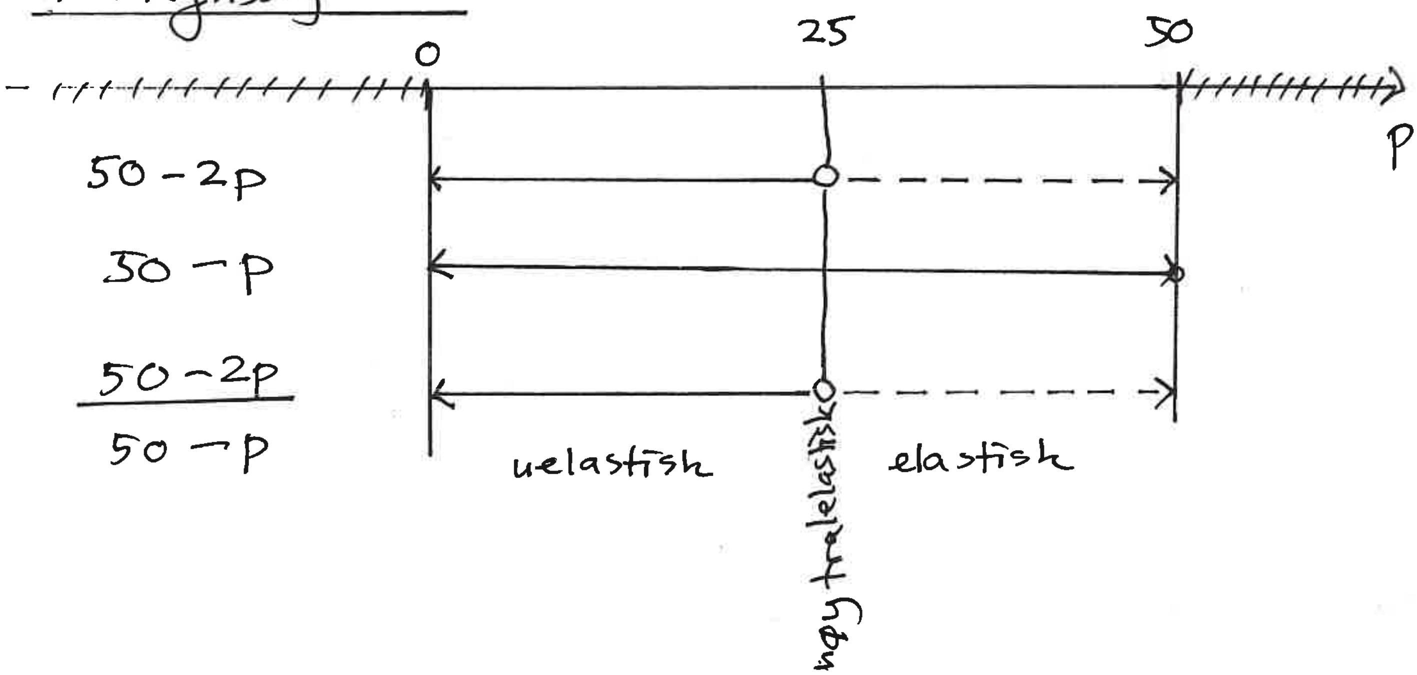
dvs $$\frac{-p}{50-p} < -1 \qquad | +1$$

$$\frac{-p}{50-p} + 1 < 0$$

$$\frac{-p}{50-p} + \frac{50-p}{50-p} < 0$$

$$\frac{50-2p}{50-p} < 0$$

Fortegnsskjema



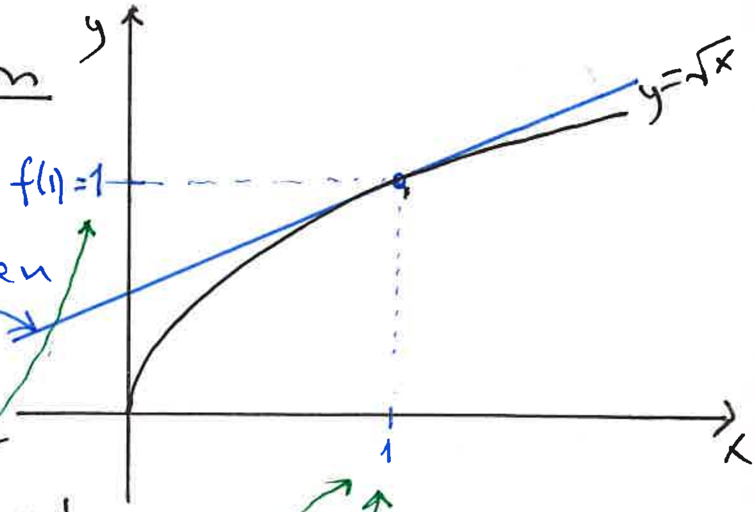
Så elastisk etterspørsel for p i $\langle 25, 50 \rangle$

og uelastisk ——— " ——— $\langle 0, 25 \rangle$

og nøytral elastisk ——— " ——— $p = 25$

Start: 9.10

2. Lineær approksimasjon



Eks $f(x) = \sqrt{x}$

Den lineære approksimasjonen til $f(x)$ ved $x=1$

Vi kan finne funksjonsuttrykket for denne tangentlinjen ved å bruke ettpunktsformelen:

$$y - \underset{f(1)}{1} = f'(1)\cdot(x-1)$$

så $y = 1 + f'(1)\cdot(x-1)$ kalles Taylorpolynomet av grad 1 til $\sqrt{x}$ ved $x=1$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}$

$= \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(1) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

så $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$

skriver $P_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$

Feks. $P_1(1{,}1) = 1 + \frac{1}{2}(1{,}1-1)$

$= 1 + \frac{0{,}1}{2} = \underline{1{,}05}$

(sjekk : $\sqrt{1{,}1} = 1{,}04881\ldots$

3. Taylorpolynomer

Eks $f(x) = \sqrt{x}$

Taylorpolynomet av grad 2
til $f(x)$ ved $x = 1$ er

$$P_2(x) = \overbrace{f(1) + f'(1)\cdot(x-1)}^{P_1(x)} + \frac{f''(1)}{2}\cdot(x-1)^2$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{2}\cdot(x-1)^2$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^2$$

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f''(1) = -\frac{1}{4\cdot 1\sqrt{1}} = -\frac{1}{4}$$

Mønster

$$\boxed{P_2(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}$$

I eks. er $a = 1$.

$$\sqrt{2} = f(2) \approx P_2(2) = 1 + \tfrac{1}{2}(2-1) - \tfrac{1}{8}(2-1)^2$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} = 1{,}375$$

(sjekk: $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$)

$$\sqrt{1{,}2} = f(1{,}2) \approx P_2(1{,}2) = 1 + \tfrac{1}{2}\cdot(1{,}2-1) - \tfrac{1}{8}\cdot(1{,}2-1)^2$$

$$= 1 + 0{,}1 - 0{,}005 = 1{,}0950$$

(sjekk: $\sqrt{1{,}2} = 1{,}0954\ldots$)

Eks $f(x) = \sqrt{x}$

Da er Taylorpolynomet av grad 3 til $f(x)$ ved 1 gitt som:

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{f'''(1)}{6}\cdot(x-1)^3$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{6}\cdot(x-1)^3$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$$

$f''(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}-1}$

$= \frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{5}{2}}$

$= \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$

så

$f'''(1) = \frac{3}{8\cdot 1^2\cdot\sqrt{1}}$

$= \frac{3}{8}$

Eks:

$$P_3(1{,}2) = P_2(1{,}2) + \frac{1}{16}\cdot(1{,}2-1)^3$$

$$\overset{\text{regne}}{=} 1{,}0955$$

$(\sqrt{1.2} = 1{,}0954)$

Mønster: $P_3(x) = \underbrace{\overbrace{f(a) + f'(a)\cdot(x-a)}^{P_1(x)} + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2}_{P_2(x)} + \frac{f'''(a)}{6}\cdot(x-a)^3$

Taylorpolynomet av grad n for $f(x)$ ved $x = a$ er

$$\boxed{\begin{gathered} P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ \text{hvor } n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \end{gathered}}$$

– se GeoGebrafil for grafene til

$f(x) = \sqrt{x}$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$