Plan

1. Integrasjon og bestemte integral
2. Anti-derivasjon og ubestemte integral
3. Integrasjonsregler
4. Substitusjon

Om kurset:

Foreles. Tors 10-12
Veiledn. Tors 12 –
Video oppgavegjennomgang

} forelesningsnotater
oppgavesett
(lenker på nettsiden)

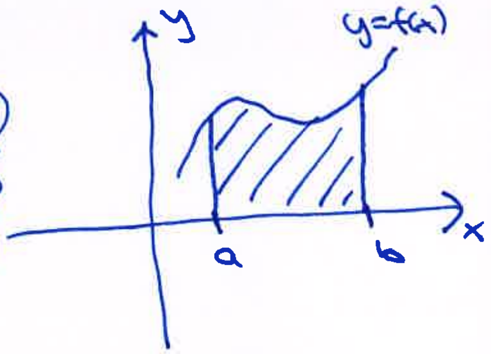
Padlet: passord 1180

Tema: – integrasjon kap 5
– matriser og vektorregning " 6
– funksjoner i to variabler " 7
+ alt fra høstsemesteret

Eksamen: * fagoppgave ← kontor
* avsluttende eksamen
(23/05/2022)

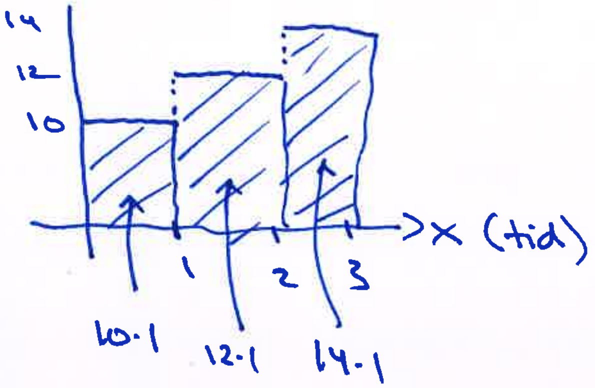
① Bestemt integral

Def: $\int_a^b f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{arealet av} \\ \text{området under} \\ \text{grafen til } f \\ \text{i } [a,b] \end{array} \right\}$



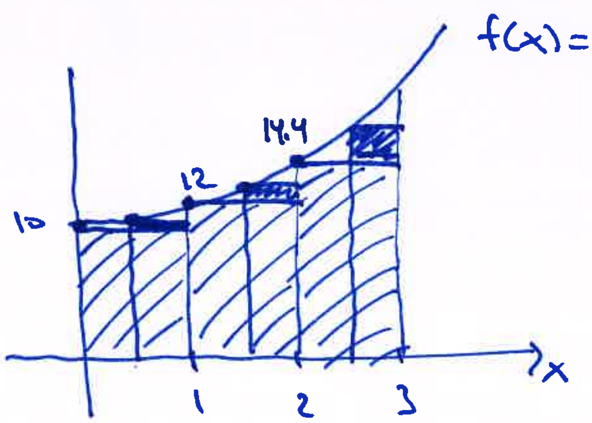
Eks:
Leieinntekt i tre år: $10+12+14=36$

Antar:
i) $f(x) \geq 0$ i $[a,b]$
ii) f er kont. i $[a,b]$
iii) $a<b$



$f(x)=10\cdot 1{,}2^x$

$$\int_0^3 10\cdot 1{,}2^x\,dx$$



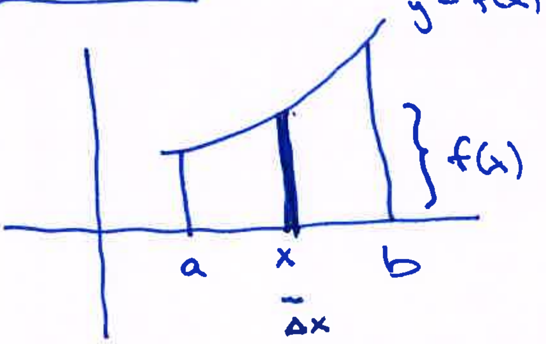
Riemann sum $\longrightarrow$ $\simeq 10\cdot 1+12\cdot 1+14{,}4\cdot 1 = 36.4$

$= f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1$

$\simeq 10\cdot 0.5 + f(0.5)\cdot 0.5$

$+ \ldots$

Generelt:



Riemannsum: summen av $\{f(x)\cdot \Delta x\}$
(Riemann-sum)

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

② Ubestemte integral og antiderivasjon

Defn: En antiderivert til en fn. $f(x)$ er en funksjon $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$.

Eks: $f(x) = 2x$

Antiderivert:

✓ $F(x) = x^2$ $\quad (x^2)' = 2x$

✓ $F(x) = x^2 - 1$ $\quad (x^2-1)' = 2x$

✓ $F(x) = x^2 + C$ $\quad (x^2+C)' = 2x$

Resultat: Hvis $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$, så gir $F(x) + C$ alle antideriverte til $f(x)$

Defn: $$\int f(x)\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{den generelle} \\ \text{antideriverte til} \\ f(x)\end{array}\right\} = F(x) + C$$

når $F'(x) = f(x)$

Ubestemt integral

x er integrasjonsvariabelen

Eks: $\int 2x\,dx = x^2 + C$ ← C: integrasjonskonstant

$$\int 1 - 4x + 12x^2\,dx = x - 2x^2 + 4x^3 + C$$

③ Integrasjonsregler:

$(x^n)' = n x^{n-1}$

$(x^{n+1})' = (n+1)x^n$

$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{\cancel{n+1}} \cdot \cancel{(n+1)}x^n = x^n$

Potensregelen

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

for alle $n \neq -1$

Liste over integrasjonsregler:

i) $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$ (potensregelen)

ii) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$ $(n = -1)$

iii) $\int u(x) \pm v(x) \, dx = \int u(x) \, dx \pm \int v(x) \, dx$ (sum/diff.)

iv) $\int c \cdot u(x) \, dx = c \cdot \int u(x) \, dx$ (c konst.) (konstant coeff.)

v) $\int e^x \, dx = e^x + C$ (eksponential-fn.)

$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C$ $(a > 0)$

Eks:

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C \quad (n=4)$$

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} \cdot x\sqrt{x} + C \quad (n = 1/2)$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -1/x + C$$

$$\frac{1}{-1} \cdot x^{-1} + C$$
$$-\frac{1}{x} + C$$

$$\int 10 \cdot 1.2^x dx = 10 \cdot \int 1.2^x dx = 10\left(\frac{1}{\ln 1.2} \cdot 1.2^x\right) + C \quad (a = 1.2)$$

$$= \frac{10}{\ln(1.2)} \cdot 1.2^x + C$$

$$\int \frac{x^2 - 3x + 12}{x} dx = \int \frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{12}{x} \, dx$$

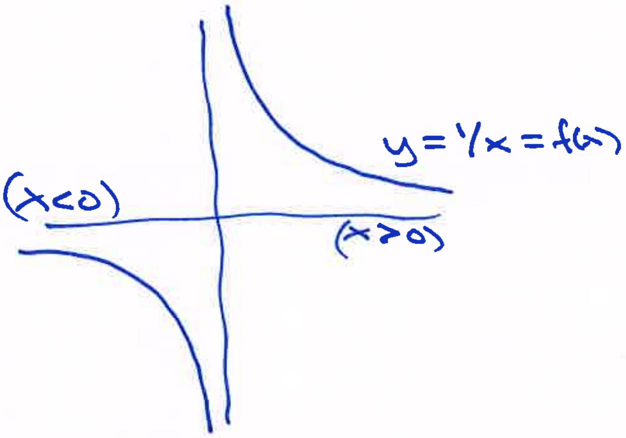
$$= \int x \, dx - \int 3 \, dx + 12 \cdot \int \frac{1}{x} dx$$

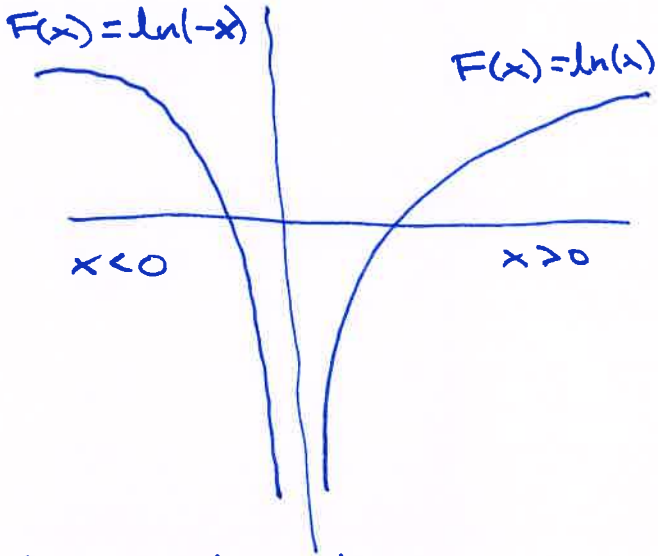
$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 12(\ln|x|) + C$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 12 \ln|x| + C$$

Forklaring:

$$\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)=1/x,\ x\neq 0} dx = \ln|x| + C$$





$$\left(\ln(-x)\right)' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = 1/x$$

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x), & x>0 \\ \ln(-x), & x<0 \end{cases} = \ln|x|$$

* substitusjon
* delvis integrasjon
* delbrøkoppspalting.

integrasjonsteknikker

④ Substitusjon:

Eks: $\int e^{2x}\,dx = \int e^{u}\,dx$

$\boxed{\begin{array}{c} u = 2x \\ du = 2\,dx \end{array}}$

$dx = \frac{1}{2}\,du$

$(e^{2x})' = e^{2x}\cdot 2$

$\int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$

Formel:

$du = u'\cdot dx$

$dx = \frac{1}{u'}\cdot du$

$= \int e^{u}\,\frac{1}{2}\,du = \int \frac{1}{2}e^{u}\,du$

$= \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}(e^{u}) + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{2x} + C}}$

Metode:

i) Velg $u =$ uttrykk i x

ii) sett $du = u'\cdot dx$

iii) skriv om integralet som $\int g(u)\,du$ og løs det (og bytt ut ~~tilbake~~ med x)

Eks: $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{u}\,\frac{du}{2x} = \int \frac{\cancel{x}}{2u\cancel{x}}\,du$

$\boxed{\begin{array}{c} u = x^2+1 \\ du = 2x\,dx \end{array}}$

$= \int \frac{1}{2u}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C}}$

Hvorfor:

$u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow u'\cdot dx = du$

$dx = \frac{1}{u'}\,du$

Merk: Per definisjon blir overgangen slik:

$\int f(x)\,dx \longrightarrow \int f(x)\cdot\frac{1}{u'}\,du$

$du = u'\,dx$