Plan

1 Likningssystemer

Eks: i) $x+y=4$ (grad 1), $x-y=2$ (grad 1) — lineært

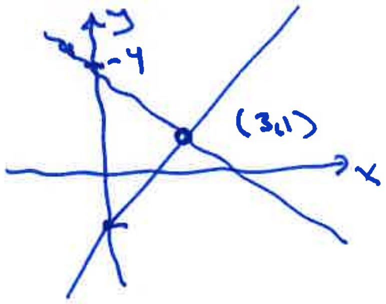
ii) $x^2+y^2=10$ (grad 2), $x+y=4$ (grad 1) — ikke lineært

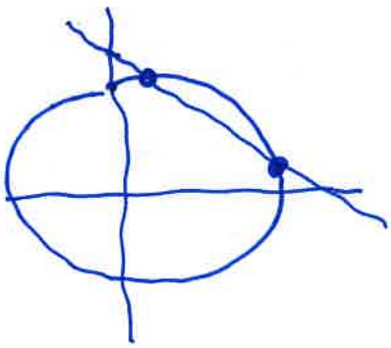
iii) $x^2+y^2=10$ (grad 2), $xy=3$ (grad 2) — ikke lineært

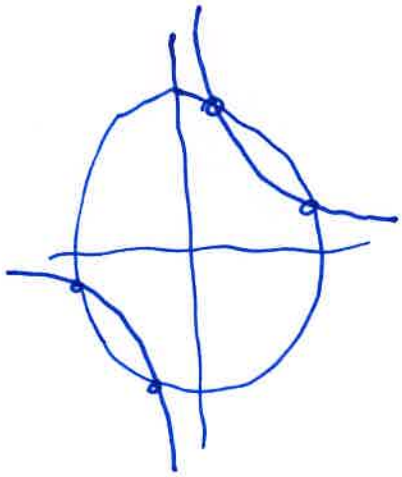
Antall løsninger (forventet)

$1\cdot 1=1$ $\quad$ $2\cdot 1=2$ $\quad$ $2\cdot 2=4$

Geometrisk:







$x+y=4 \Rightarrow y=-x+4$
$x-y=2 \quad\; y=x-2$

$xy=3 \Rightarrow y=3/x$

Eks: $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$

$$\boxed{\begin{aligned} f'_x &= 3x^2-3y=0 \\ f'_y &= -3x+3y^2=0 \end{aligned}}$$

Substitusjon:

$3x^2-3y=0 \Rightarrow \underline{y=x^2}$

$-3x+3(x^2)^2=0$

$-3x+3x^4=0$

$-3x(1-x^3)=0$

$-3x=0$ eller $x^3=1$

$\underline{x=0}$, $\underline{y=0}$ $\quad\big|\quad$ $x=\sqrt[3]{1}=1$, $y=1$

Konklusjon: Løsningene er $(x,y)=\underline{(0,0)}$, $\underline{(1,1)}$

Eks:
$$\begin{aligned} x+y&=4 \\ x-y&=2 \end{aligned}$$

Eliminasjon:
$$\begin{array}{rl} & x+y=4 \\ + & x-y=2 \\ \hline & 2x \quad =6 \end{array}$$
$\underline{x=3}$ $\underline{y=1}$

$(x,y)=\underline{\underline{(3,1)}}$

Eks:
$$\begin{aligned} x^2+y^2&=10 \\ x+y&=4 \end{aligned}$$

Substitusjon:

$x+y=4 \Rightarrow y=\underline{\underline{4-x}}$

$x^2+(4-x)^2=10$

$x^2+16-8x+x^2=10$

$2x^2-8x+6=0$

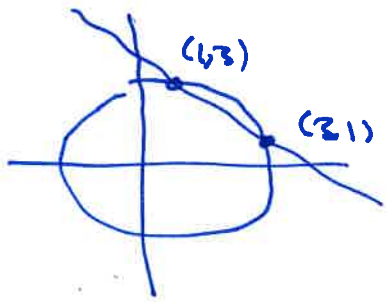
$x^2-4x+3=0$

$\underline{x=3}$, $\underline{x=1}$

$\underline{y=1}$ | $y=3$

To løsninger:

$(x,y)=(3,1),\ (1,3)$



Defn: Et $m\times n$ lineært system i variablene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er et system av m lineære likninger i disse variablene, og kan skrives

$$m\left\{\begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ \underbrace{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n}_{n} = b_m \end{array}\right.$$

der $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ og $b_1, \ldots, b_m$ er gitte tall.

Eks: $x+y+z=3$, $x+2y+4z=7$, $x+3y+9z=13$ — 3x3 lineært system

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ x+2y+4z&=7\\ x+3y+9z&=13 \end{aligned} \longrightarrow x = 3-y-z: \quad \underline{\underline{x=1}}$$

$(3-y-z)+2y+4z=7$

$(3-y-z)+3y+9z=13$

$$\boxed{\begin{aligned} y+3z&=4\\ 2y+8z&=10 \end{aligned}}$$

$\underline{\underline{y=1}}$ $\quad y = \underline{4-3z}:$

$2(4-3z)+8z=10 \quad \boxed{2z=2}$

$\underline{\underline{z=1}}$

Én løsning: $(x,y,z) = \underline{\underline{(1,1,1)}}$

② **Gauss-eliminasjon:** generell metode for å løse lineære system

i) Skriv ned den utvidede matrisen til systemet
ii) Bruk elementære radoperasjoner til å overføre matrisen til trappeform
iii) Skriv ned likningssystemet som svarer til trappeformen og løs det ved hjelp av baklengs substitusjon

Eks: $x+y+z=3$, $x+2y+4z=7$, $x+3y+9z=13$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4 & 7\\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right)$$

$(-1 \;\; -1 \;\; -1 \mid -3)$

utvidede matrisen til systemet

Elementære radoperasjoner:

i) Bytte om to rader
ii) Multiplisere en rad med $c \neq 0$
iii) Legge til ett multippel av en rad til en annen rad

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -1 \end{array}$$

$(-1\ \ -1\ \ -1 \mid -3)$

0

0

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \\ \\ \end{array}$$

$(0\ \ -2\ \ -6 \mid -8)$

0

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

trappeform

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y + 3z &= 4 \\ 2z &= 2 \end{aligned}$$

Baklengs substitusjon:

$2z = 2 \Rightarrow z = 1$

$y + 3 \cdot 1 = 4 \Rightarrow y = 1$

$x + 1 + 1 = 3 \Rightarrow x = 1$

Én løsning:

$(x, y, z) = (1, 1, 1)$

Trappeform:

pivot (ledende koeff.) = det første tallet ulik null i en rad

trappeform: matrise slik at

i) hver pivot kommer lenger til høyre enn pivoten i radene over (tallene under en pivot er null)

ii) nullrader er i bunnen av matrisen

Eks:

$$x + y + z = 4$$
$$x - y + z = 1$$
$$3x + y + 3z = 9$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 9 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1 \\ -3 \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$x \quad y \quad z$

trappeform

$$x + y + z = 4$$
$$-2y = -3$$

$$y = \frac{-3}{-2} = 3/2$$

$$x + 3/2 + z = 4$$

$$x = 4 - 3/2 - z = 5/2 - z$$

Løsning: Uendelig mange løsn.

$$(x, y, z) = (5/2 - z, 3/2, z)$$

der z er fri

frie variabler = z

variabler som svarer til kolonner uten pivot

Minst én fri variabel ⇒ uendelig mange løsn.

Eks:

$$x + y + z = 4$$
$$x - y + z = 1$$
$$3x + y + 3z = 10$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1 \\ -3 \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1$$

ingen løsn.

pivot i siste kolonne i trappeformen
⇕
ingen løsninger