MET1181, 8. forelesning, 7. okt. 2021, Runar Ile

Plan
1. Voksende og avtagende funksjoner
2. Sirkler og ellipser
3. Polynomfunksjoner

1. Voksende og avtagende funksjoner

Eks $f(x) = 0{,}03x^2 + 8x - 1500$, $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ (dvs $x \geq 0$)

Er $f(x)$ voksende?

Er $f(x)$ avtagende?

– eller ingen av delene?

Kan se på grafen (i GeoGebra el.)

eller vi kan finne symmetriaksen ved å fullføre kvadratet.

$$f(x) = 0{,}03 \cdot \left[x^2 + \frac{800}{3}x\right] - 1500$$

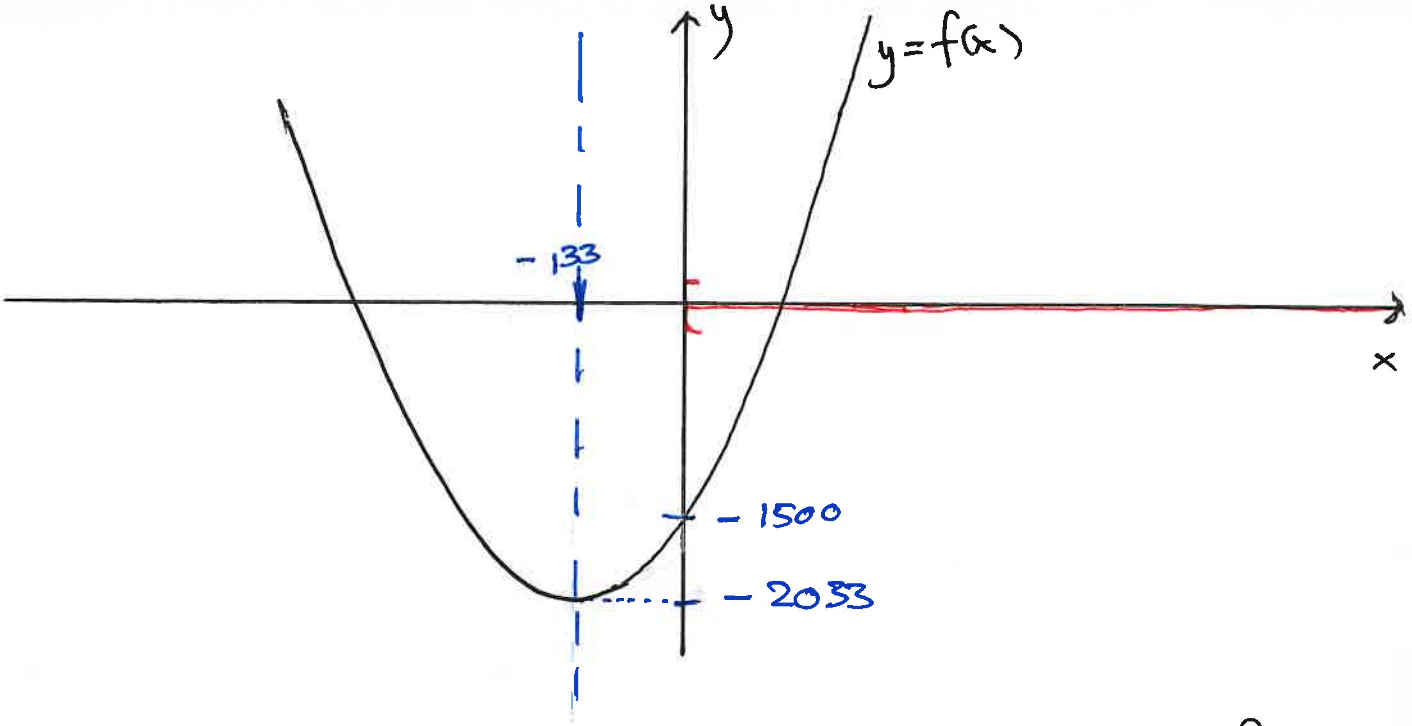
$$= 0{,}03\left[\left(x + \frac{800}{6}\right)^2 - \left(\frac{800}{6}\right)^2\right] - 1500$$

$$= 0{,}03 \cdot \left(x + \frac{800}{6}\right)^2 - \frac{6100}{3}$$

Symmetrilinjen: $x = s = -\frac{800}{6} \approx -133$ (y fri)

Minimumsverdien: $y = f\left(-\frac{800}{6}\right) = -\frac{6100}{3} \approx -2033$

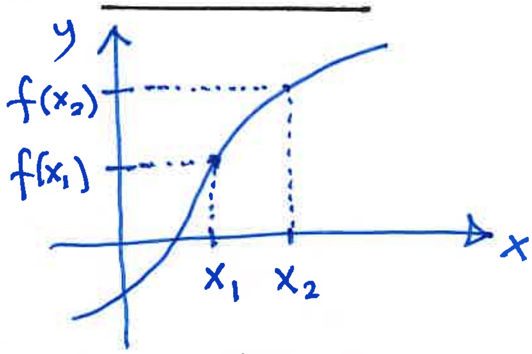
(minimum fordi $0{,}03 > 0$)



Fordi symmetriaksen ligger til venstre for $x=0$, er $f(x)$ voksende i hele sitt definisjonsområde

---

<u>Definisjon</u> En funksjon $f(x)$ er <u>voksende</u> hvis for <u>alle</u> $x_1 < x_2$ så gjelder $f(x_1) \leq f(x_2)$



<u>Eks</u> $f(x) = 2x + 5$ er <u>voksende</u> for alle x

<u>Fordi</u> Anta

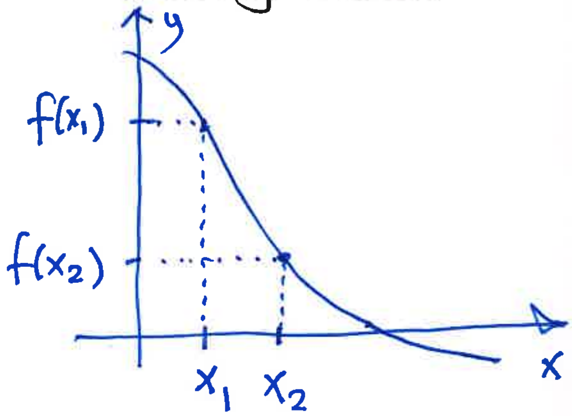
$$x_1 < x_2 \quad | \cdot 2$$

$$2x_1 < 2x_2 \quad | +5$$

$$f(x_1) = 2x_1 + 5 < 2x_2 + 5 = f(x_2)$$

Altså er $f(x)$ (strengt) voksende

Definisjon En funksjon $f(x)$ er <u>avtagende</u> hvis for alle $x_1 < x_2$ så gjelder $f(x_1) \geq f(x_2)$



Oppgave Vis at $f(x) = -2x + 5$ er (strengt) avtagende.

Løsning Anta $x_1 < x_2 \quad | \cdot (-2)$

$$-2x_1 > -2x_2 \quad | + 5$$

$$f(x_1) = -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 = f(x_2)$$

Så $f(x)$ er (strengt) avtagende.

Oppgave Vi har konstantfunksjonen $f(x) = 5$. Avgjør om $f(x)$ er voksende / avtagende / ingen av delene

Løsning

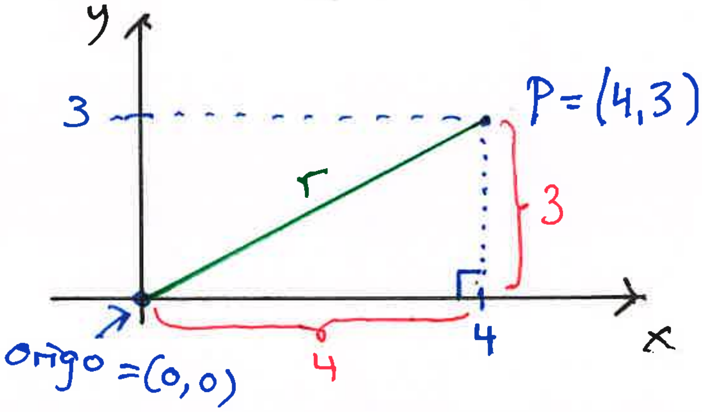
Voksende: Hvis $x_1 < x_2$ så vil $f(x_1) = 5 \leq 5 = f(x_2)$

Avtagende: Hvis $x_1 < x_2$ så vil $f(x_1) = 5 \geq 5 = f(x_2)$

Men $f(x)$ er ikke strengt voksende eller strengt avtagende.

---

2. Sirkler og ellipser



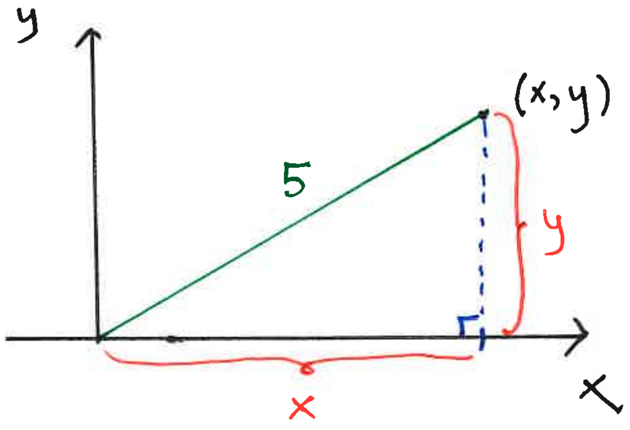
Pytagoras:

$$r^2 = 4^2 + 3^2 \qquad (r \geq 0)$$

$$r^2 = 16 + 9 = 25$$

$$r = \sqrt{25} = 5$$

Anta punktet (x, y) ligger 5 fra origo.
Hva er likningen



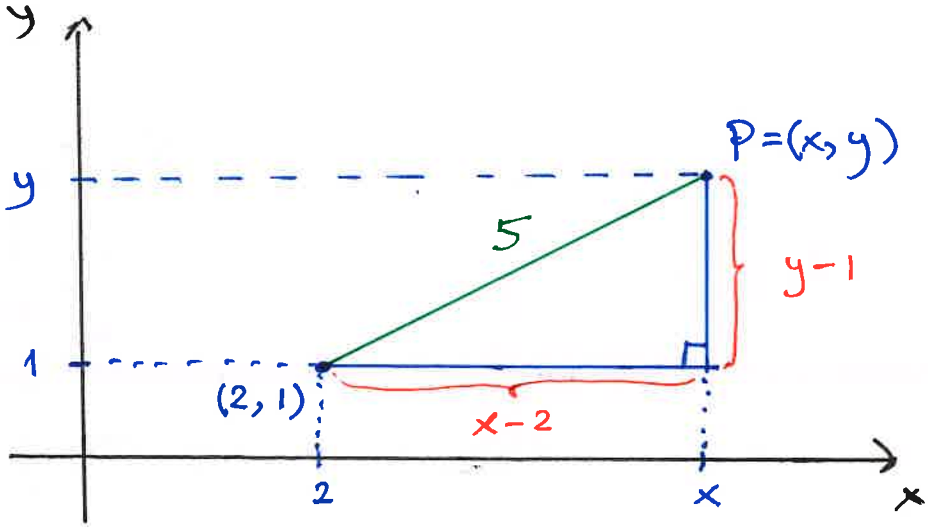
Pytagoras:

$5^2 = x^2 + y^2$

- én likning med to ukjente
- uendelig mange løsninger

Løsningene er alle punkter på en sirkel med radius 5 og sentrum i origo.

Eks Hva er likningen til punktene på en sirkel med radius 5 og sentrum $(2,1)$?



Pytagoras: $5^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$

$$25 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$$

Oppg. Bestem radius og sentrum til sirkelen gitt ved likningen

$$x^2+y^2-2x+6y=-9$$

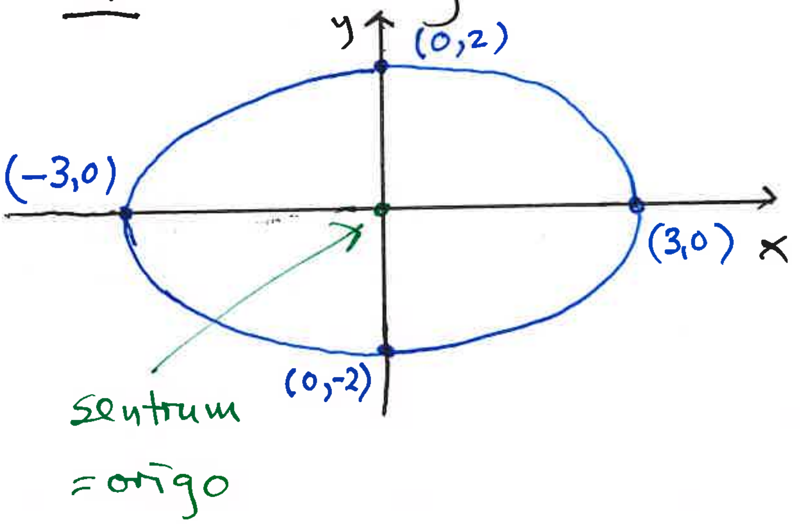
Løsning $\underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1}+\underbrace{(y+3)^2}_{y^2+6y+9}=-9+(-1)^2+3^2=1$

Sentrum: $\underline{\underline{(1,-3)}}$, radius: $\sqrt{1}=\underline{\underline{1}}$

Ellipser

Eks $4x^2+9y^2=36$

x	3	-3	0	0
y	0	0	2	-2



Deler b.s. av likningen med 36

$$\underbrace{\frac{4}{36}}_{=\frac{1}{9}}\cdot x^2+\underbrace{\frac{9}{36}}_{=\frac{1}{4}}\cdot y^2=1$$

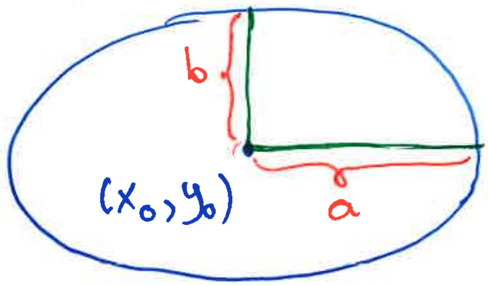
$$\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$$

Dette minner om en sirkel likning, men x-aksen er strukket med faktor 3 og y-aksen ——"—— 2

Generelt Alle ellipser kan skrives på formen

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

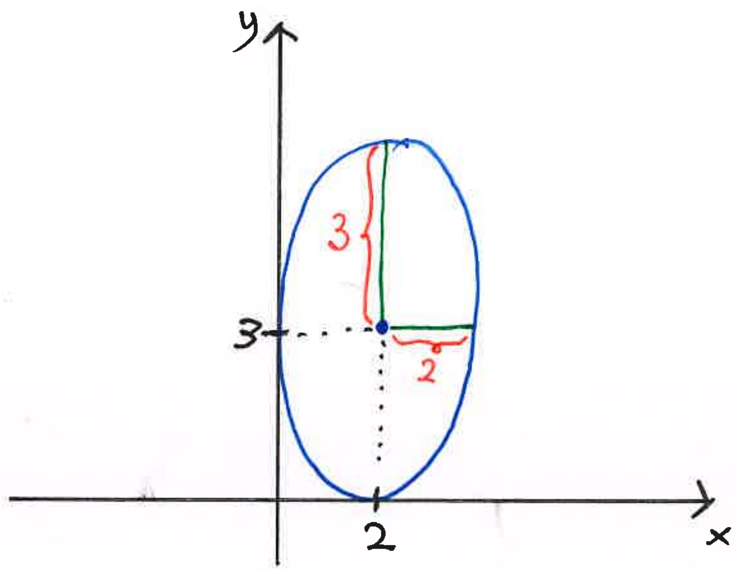
Her er (x_0, y_0) sentrum i ellipsen og a og b er horisontal og vertikal halvakse.



Eks $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

sentrum : $(2, 3)$

halvakser: $a = \sqrt{4} = 2$ og $b = \sqrt{9} = 3$



3. Polynomfunksjoner

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

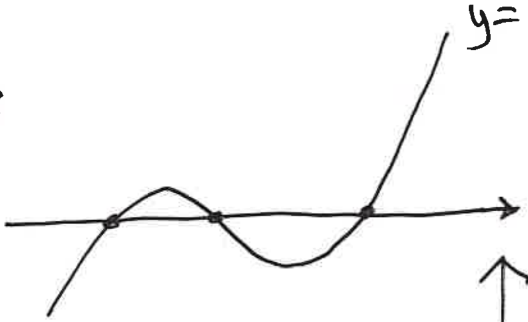
er en polynomfunksjon av grad n hvis $a_n \neq 0$

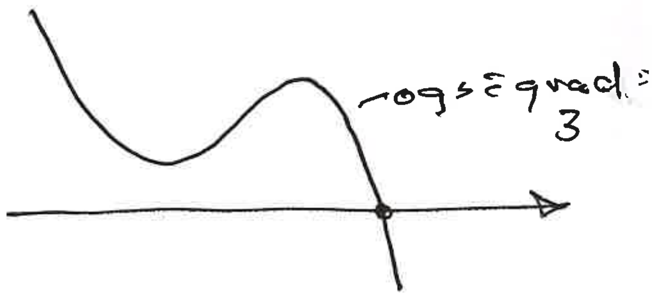
f(x) har maksimalt n røtter (nullpunkter)

Hvis graden er et oddetall har den alltid en rot.

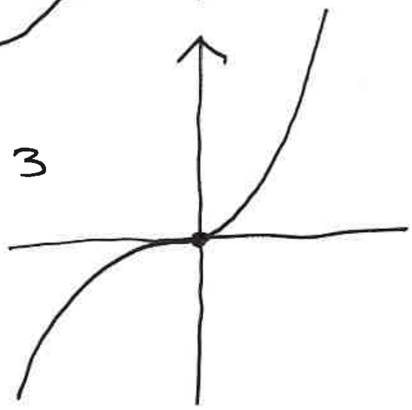
y=f(x) har grad 3

Eks

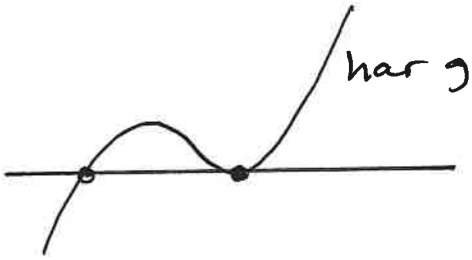




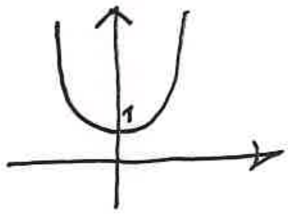
Eks $f(x) = x^3$



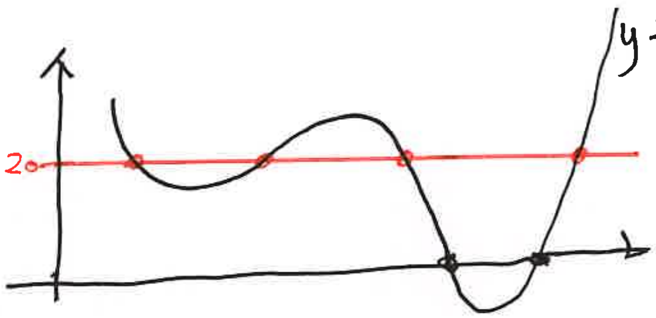
Eks



Eks $f(x) = x^4 + 1$



Eks



$f(x) = 20$ har 4 løsninger

dvs $\underbrace{f(x) - 20}_{} = 0$ –ıı–

polynom av samme grad som f(x), minst 4.