MET1181 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2021
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing.

R. Lucas

Forelesning 10
torsdag 14/10 kl 8-9.45.
Kap 3.11-13: Omvendte funksjoner. Eksponentialfunksjoner. Logaritmer.

[L] 3.10.1-2
[L] 3.11.1-3
[L] 3.12.1-5
[L] 3.13.1-3

Flervalgseksamen 2015h oppg 14
Flervalgseksamen 2016v oppg 11
Flervalgseksamen 2016h oppg 13
Flervalgseksamen 2017v oppg 13
Flervalgseksamen 2018v oppg 13

Repetisjon:
Flervalgseksamen 2015h oppg 9
Flervalgseksamen 2016v oppg 9
Flervalgseksamen 2016h oppg 7 og 8
Flervalgseksamen 2017v oppg 7 og 8

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 14/10 i D1-065 (kl 10-13) og B2-045 (kl 10-16) eller på Zoom

Oppgave 1 Anta $g(x)$ er den omvendte funksjonen til $f(x)$. Bestem:

a) $g(10)$ hvis $f(3) = 10$
b) $f(g(5))$
c) $f(\sqrt{2})$ hvis $g(3) = \sqrt{2}$
d) $g(f(9))$

Oppgave 2 Finn den omvendte funksjonen $g(x)$ og definisjonsmengden D_g til funksjonen $f(x)$ med definisjonsmengde D_f.

a) $f(x) = 2x - 3$ med D_f = hele tallinjen
b) $f(x) = 0{,}5x + 1{,}5$ med D_f = hele tallinjen
c) $f(x) = x^2 + 6x$ med $D_f = \langle -\infty\,, -3]$
d) $f(x) = 20 + \frac{1}{x-3}$ med $D_f = \langle 3\,, \infty\rangle$
e) $f(x) = (x-1)^3 + 50$ med $D_f = [1\,, \infty\rangle$

Oppgave 3 Vi har (tilnærmet) $\ln 2 = 0{,}6931$ og $\ln 3 = 1{,}0986$ og $\ln 5 = 1{,}6094$. Bruk disse tallene til å finne verdiene (tilnærmet) uten å bruke ln-tasten på kalkulatoren.

a) $\ln 250$
b) $\ln 625$
c) $\ln \frac{625}{216}$
d) $\ln \frac{1\,000\,000}{27}$
e) $\ln 130 - \ln 78$
f) $\ln \sqrt[10]{6}$

Oppgave 4 Løs likningene.

a) $e^x = 5$
b) $e^{2x+1} = 5$
c) $e^{2x+1} = 3e^{x+2}$
d) $\ln(x) = -2$
e) $\ln(7x-3) = -2$
f) $\ln(x-3) = \ln(2x+1) + 1$
g) $e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$

Oppgave 5 Løs ulikhetene.

a) $e^x \geqslant 5$ b) $e^{2x+1} \geqslant 5$ c) $\ln(x) < -2$ d) $\ln(x-3) < -2$

e) $\frac{3e^x}{e^x+1} < 5$ f) $\ln\frac{3x-2}{x-7} \geqslant 0$

Oppgave 6 Finn asymptotene til funksjonen.

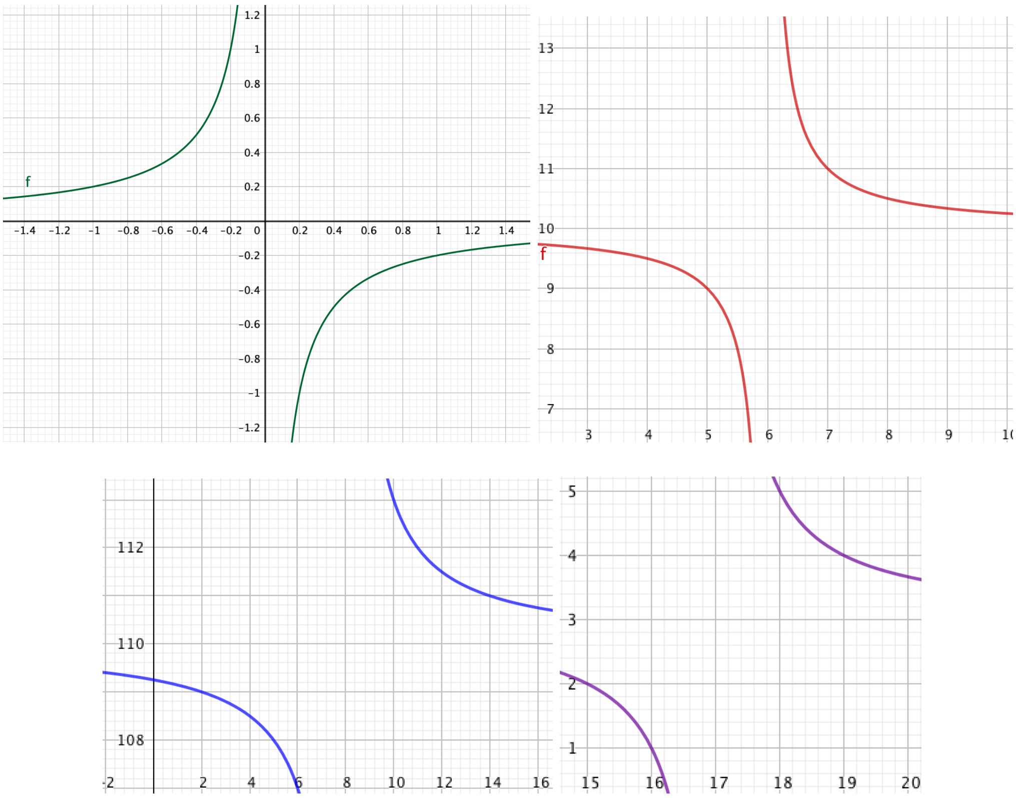
a) $f(x) = e^{-0.1x} + 23$ b) $f(x) = e^{x(10-x)} + 50$ c) $f(x) = \frac{100e^{0,04x}}{e^{0,04x}+50}$

d) $f(x) = \ln(10-x)$ e) $f(x) = \ln(x^2 - 400)$

f) $f(x) = \ln(120x+10) - \ln(20x-30)$, $D_f = \langle \frac{3}{2}, \rightarrow\rangle$

Oppgave 7 Finn den omvendte funksjonen $g(x)$ og definisjonsmengden D_g til funksjonen $f(x)$ med definisjonsmengde D_f.
(a) $f(x) = e^{\frac{x}{3}} - 1$ med $D_f = [0, \infty\rangle$ (b) $f(x) = 4\ln(x-10)$ med $D_f = [11, \infty\rangle$

Oppgave 8 Bestem funksjonsuttrykket $f(x) = c + \frac{a}{x-b}$ til hyperblene (a-d) i figur 1.



Figur 1: Hyperbler a-d

Oppgave 9 Bestem asymptotene til hyperblene (a-d) i oppgave 8.
Oppgave 10 Bestem asymptotene til de rasjonale funksjonene.

a) $f(x) = \frac{4x-10}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{70-40x}{3-2x}$ c) $f(x) = \frac{3x^2-6x+8}{x^2+3}$

d) $f(x) = \frac{4x^2-28x+40}{x^2-4x+3}$ e) $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x-7}$ f) $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-10x+16}$

Oppgave 11 Avgjør om funksjonen $f(x)$ har et nullpunkt i intervallet I. Tips: Skjæringssetningen!
a) $f(x) = \sqrt{x-2} - x + 3$ og $I = [4, 5]$
b) $f(x) = (x-5)\sqrt{(0{,}2x+5)} - 0{,}2(x-3)^2$ og $I = [5, 15]$
c) $f(x) = \frac{4x-10}{x-3} - 4$ og $I = [2, 4]$

Fasit

Oppgave 1

a) 3 b) 5 c) 3 d) 9

Oppgave 2

a) $g(x) = 0{,}5x + 1{,}5$ med $D_g = \langle -\infty\,,\,\infty\rangle$ (alle tall på tallinjen)

b) $g(x) = 2x - 3$, $D_g = \langle -\infty\,,\,\infty\rangle$ (alle tall på tallinjen)

c) $g(x) = -3 - \sqrt{x+9}$, $D_g = V_f = [-9\,,\,\infty\rangle$

d) $g(x) = 3 + \frac{1}{x-20}$, $D_g = \langle 20\,,\,\infty\rangle$

e) $g(x) = \sqrt[3]{x-50} + 1$, $D_g = [50\,,\,\infty\rangle$

Oppgave 3

a) $\ln 250 = \ln 2 + 3\ln 5 = 0{,}6931 + 3\cdot 1{,}6094 = 5{,}5213$

b) $\ln 625 = 4\ln 5 = 4\cdot 1{,}6094 = 6{,}4376$

c) $\ln\frac{625}{216} = 4\ln 5 - 3(\ln 3 + \ln 2) = 4\cdot 1{,}6094 - 3(1{,}0986 + 0{,}6931) = 1{,}0625$

d) $\ln\frac{1\,000\,000}{27} = 6(\ln 5 + \ln 2) - 3\ln 3 = 6\cdot(1{,}6094 + 0{,}6931) - 3\cdot 1{,}0986 = 10{,}5192$

e) $\ln 130 - \ln 78 = \ln 5 + \ln 26 - \ln 3 - \ln 26 = 1{,}6094 - 1{,}0986 = 0{,}5108$

f) $\ln 6^{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10}\cdot\ln 6 = \frac{1{,}0986+0{,}6931}{10} = 0{,}1792$

Oppgave 4

a) $x = \ln 5$ b) $x = \frac{1}{2}(\ln(5) - 1)$ c) $x = 1 + \ln(3)$

d) $x = e^{-2}$ e) $x = \frac{e^{-2}+3}{7}$ f) $x = -\dfrac{e+3}{2e-1}$

g) $x = \ln 5$

Oppgave 5

a) Fordi $\ln x$ er en strengt voksende funksjon for $x > 0$ kan vi sette inn vs og hs i $\ln x$ og beholde ulikheten. Det gir $x \geqslant \ln 5$.

b) Vi setter vs og hs inn i $\ln x$ og beholder ulikheten. Det gir $x \geqslant \frac{1}{2}(\ln 5 - 1)$.

c) Fordi e^x er en strengt voksende funksjon kan vi sette inn vs og hs i e^x og beholde ulikheten. Det gir $0 < x < e^{-2}$.

d) Vi setter vs og hs inn i e^x og beholde ulikheten. Det gir $3 < x < 3 + e^{-2}$.

e) Alle tallene på tallinjen (kalles for de reelle tallene og skrives $\mathbb{R}$, dvs $x \in \mathbb{R}$).

f) Legg merke til at ulikheten bare er definert for $x < \frac{2}{3}$ og for $x > 7$. Vi setter vs og hs inn i e^x og beholder ulikheten. Dette gir $\frac{3x-2}{x-7} \geqslant 1$ som vi så løser: $x \leqslant -\frac{5}{2}$ eller $x > 7$ (og dette er innenfor definisjonsområdet for ulikheten). Alternativ skrivemåte: $x \in \langle -\infty\,,\,-\frac{5}{2}] \cup \langle 7\,,\,\infty\rangle$.

Oppgave 6

a) horisontal asymptote: $y = 23$ (når $x \to \infty$)

b) horisontal asymptote: $y = 50$ (når $x \to \infty$)

c) horisontale asymptoter: $y = 100$ ($x \to \infty$) og $y = 0$ ($x \to -\infty$)

d) vertikal asymptote: $x = 10$ ($y \to -\infty$ når $x \to 10^-$)

e) vertikale asymptoter: $x = \pm 20$ ($y \to -\infty$ når $x \to -20^-$ og $y \to -\infty$ når $x \to 20^+$)

f) vertikal asymptote: $x = \frac{3}{2}$, horisontal asymptote: $y = \ln 6$

Oppgave 7

a) $g(x) = 3\ln(x+1)$,
$D_g = V_f = [0\,,\,\infty\rangle$

b) $g(x) = e^{\frac{x}{4}} + 10$,
$D_g = [0\,,\,\infty\rangle$

Oppgave 8

a) $f(x) = -\frac{1}{5x}$ b) $f(x) = 10 + \frac{1}{x-6}$ c) $f(x) = 110 + \frac{6}{x-8}$ d) $f(x) = 3 + \frac{2}{x-17}$

Oppgave 9

a) vertikal asymptote: $x = 0$, horisontal asymptote: $y = 0$
b) vertikal asymptote: $x = 6$, horisontal asymptote: $y = 10$
c) vertikal asymptote: $x = 8$, horisontal asymptote: $y = 110$
d) vertikal asymptote: $x = 17$, horisontal asymptote: $y = 3$

Oppgave 10

a) $f(x) = 4 + \frac{2}{x-3}$ så vertikal asymptote: $x = 3$, horisontal asymptote: $y = 4$
b) $f(x) = 20 + \frac{10}{3-2x}$ så vertikal asymptote: $x = \frac{3}{2}$, horisontal asymptote: $y = 20$
c) $f(x) = 3 - \frac{6x+1}{x^2+3}$ så ingen vertikal asymptote, horisontal asymptote: $y = 3$
d) $f(x) = 4 - \frac{4(3x-7)}{(x-1)(x-3)}$ så vertikale asymptoter: $y = 1$ og $y = 3$, horisontal asymptote: $x = 4$
e) $f(x) = x + 10 + \frac{75}{x-7}$ så vertikal asymptote: $x = 7$, skrå asymptote: $y = x + 10$
f) $f(x) = x + 10 + \frac{84}{x-8}$ så vertikal asymptote: $x = 8$, skrå asymptote: $y = x + 10$

Oppgave 11

a) $f(x)$ har nullpunkt mellom $x = 4$ og $x = 5$ ved skjæringssetningen fordi $f(4) = \sqrt{4-2} - 4 + 3 = 0{,}41 > 0$ mens $f(5) = \sqrt{5-2} - 5 + 3 = -0{,}27 < 0$ og funksjonen er definert og kontinuerlig på hele intervallet.
b) $f(x)$ har nullpunkt mellom $x = 5$ og $x = 6$ ved skjæringssetningen fordi $f(5) = -0{,}80$ mens $f(6) = 0{,}69 > 0$ og funksjonen er definert og kontinuerlig på hele intervallet.
NB: $f(15) = -0{,}52 < 0$ sammen med $f(6) > 0$ forteller at $f(x)$ har nullpunkt mellom $x = 6$ og $x = 15$. Så f(x) har minst 2 nullpunkter på intervallet $[5\,,\,15]$.
c) $f(x) = \frac{2}{x-3}$ har ingen nullpunkter på intervallet $I = [2\,,\,4]$ fordi likningen $\frac{2}{x-3} = 0$ ikke har noen løsninger. NB: Vi kan ikke bruke skjæringssetningen selv om $f(2) = -2 < 0$ og $f(4) = 2 > 0$ fordi $f(x)$ ikke er definert i hele intervallet (selv om $f(x)$ er kontinuerlig for alle x der den er definert).