

*I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.*

R. Lucas

## Forelesning 15

torsdag 18/11 kl 8-9.45

**Kap 4.8-9: l'Hôpitals regel. Grenseinntekt og grensekostnad.**

[L] 4.8 1-2  
[L] 4.9 1-2, 5-6

Flervalgseksamen 2016v oppg 13  
Flervalgseksamen 2016h oppg 14  
Flervalgseksamen 2018v oppg 12

**Oppgaver for veiledningstimene torsdag 18/11  
i D1-065 og B2-045 til 15.45 eller på Zoom**

**Oppgave 1** Beregn grenseverdiene.

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x}{25(x-1)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \ln 5} \frac{e^x - 5}{x^2 - 5}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \ln 5} \frac{e^x - 5}{x^2 - (\ln 5)^2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{e^x - 1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{10}}{e^x - 1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{e^{2x} - e^2}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x} - 1}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2-3x+2} - 1}{x^2 - 4}$

**Oppgave 2** Beregn grenseverdiene ved å bruke l'Hôpitals regel.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{25(x-1)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{2x-2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 10}{e^x - 5}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$

**Oppgave 3** Forklar hvorfor  $K(x)$  er en kostnadsfunksjonen ved å sjekke de tre kriteriene:

- (1)  $K(0) > 0$
- (2)  $K(x)$  er en voksende funksjon
- (3)  $K(x)$  er en konveks funksjon

Bestem også konstandsoptimum og hva enhetskostnaden er ved kostnadsoptimum.

a)  $K(x) = 0,01x^2 + 8x + 2500, x \geq 0$

b)  $K(x) = 0,05(x + 200)^2, x \geq 0$

c)  $K(x) = 400e^{0,001x^2}, x \geq 0$

d)  $K(x) = 50x + 1000, 0 \leq x \leq 1000$

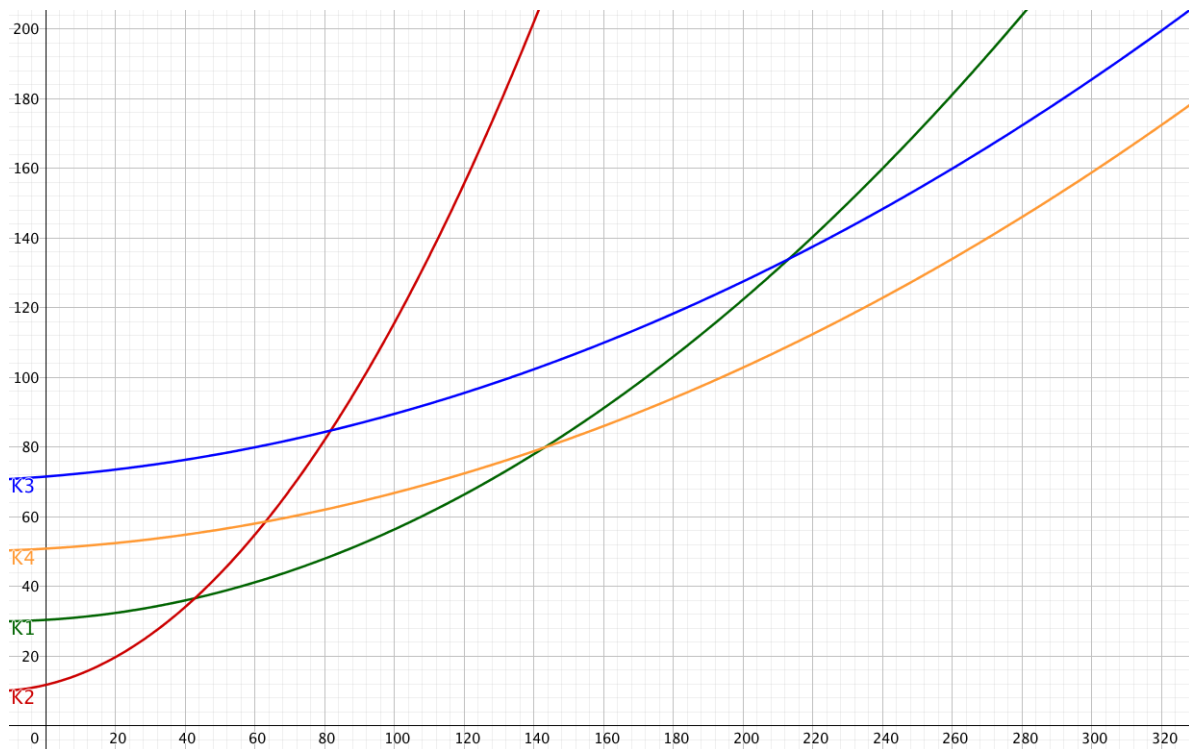
**Oppgave 4**  $K(x)$  er kostnadsfunksjonen,  $I(x)$  er inntektsfunksjonen og  $x$  er antall produserte og solgte enheter. Finn profittmaksimerende kvantum.

a)  $K(x) = 0,01x^2 + 8x + 2500$  og  $I(x) = 100x$  for  $x \geq 0$

b)  $K(x) = 0,005x^2 + 20x + 30000$  og  $I(x) = 50x$  for  $0 \leq x \leq 2000$

**Oppgave 5** I figur 1 ser du grafen til fire forskjellige kostnadsfunksjoner.

- Lage en rekkefølge av kostnadsfunksjonene fra den med minste optimale (minimale) enhetskostnad til den med største optimale enhetskostnad.
- Finn en tilnærmet verdi for kostnadsoptimum for hver av kostnadsfunksjonene.
- Finn en tilnærmet verdi for optimal (minimal) enhetskostnad for hver av kostnadsfunksjonene.



Figur 1: Fire kostnadsfunksjoner ( $K_1$ – $K_4$ )

**Oppgave 6** (Flervalgseksamen 2017v, oppg 4)

En bedrift har kostnadsfunksjonen  $C(x) = 205x^3 - 120x^2 + 2000x + 2800$  når  $x \geq 0$ . Hva er den minimale enhetskostnaden?

- 2 kr
- 12 kr
- 3980 kr
- 7960 kr
- Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

**Oppgave 7** (Flervalgseksamen 2016h, oppg 14)

Vi betrakter grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x \ln(x)}{e^x}$$

Hvilket utsagn er sant?

- Grenseverdien eksisterer ikke
- Grenseverdien er 1
- Grenseverdien er  $-\frac{1}{2}$
- Grenseverdien er 0
- Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

**Oppgave 8** (Flervalgseksamen 2015h, oppg 15)

Vi betrakter grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Hvilket utsagn er sant?

- (A) Grenseverdien eksisterer ikke
- (B) Grenseverdien er 0
- (C) Grenseverdien er 1
- (D) Grenseverdien er  $-\frac{1}{2}$
- (E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

## Fasit

### Oppgave 1

- |                                 |      |                       |
|---------------------------------|------|-----------------------|
| a) $\frac{-3}{25(3-1)} = -0,06$ | b) 0 | c) $\frac{5}{2\ln 5}$ |
| d) 7                            | e) 0 | f) 0,5                |
| g) $\frac{1}{2e^2}$             | h) 2 | i) $\frac{1}{4}$      |

### Oppgave 2

- |                    |                  |  |      |
|--------------------|------------------|--|------|
| a) $\frac{-1}{25}$ | b) $\frac{1}{2}$ | c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$ | d) 0 |
|--------------------|------------------|--|------|

### Oppgave 3

- a)  $K(0) = 2500 > 0$ ,  $K'(x) = 0,02x + 8 > 0$  for  $x > 0$  så  $K(x)$  er en voksende funksjon for  $x \geq 0$ ,  $K''(x) = 0,02 > 0$  så  $K(x)$  er en konveks funksjon for  $x \geq 0$ . Kostnadsoptimum  $x = 500$  gir minimal enhetskostnad  $A(500) = 18$
- b)  $K(0) = 2000 > 0$ ,  $K'(x) = 0,1x + 20 > 0$  for  $x > 0$  så  $K(x)$  er en voksende funksjon for  $x \geq 0$ ,  $K''(x) = 0,1 > 0$  så  $K(x)$  er en konveks funksjon for  $x \geq 0$ . Kostnadsoptimum  $x = 200$  gir minimal enhetskostnad  $A(200) = 40$
- c)  $K(0) = 400 > 0$ ,  $K'(x) = 0,8xe^{0,001x^2} > 0$  for  $x > 0$  så  $K(x)$  er en voksende funksjon for  $x \geq 0$ ,  $K''(x) = 0,8(1 + 0,002x^2)e^{0,001x^2} > 0$  så  $K(x)$  er en konveks funksjon for  $x \geq 0$ . Kostnadsoptimum  $x = 22,36$  gir minimal enhetskostnad  $A(22,36) = 29,49$
- d)  $K(0) = 1000 > 0$ ,  $K'(x) = 50 > 0$  så  $K(x)$  er en voksende funksjon for  $x \geq 0$ ,  $K''(x) = 0 \geq 0$  så  $K(x)$  er en konveks funksjon for  $x \geq 0$ . Kostnadsoptimum  $x = 1000$  gir minimal enhetskostnad  $A(1000) = 51$

### Oppgave 4

- a) For  $x = 4600$  er grensekostnad lik grenseinntekt og  $\pi''(x) = -0,02 < 0$  gir at profittfunksjonen er konkav og dermed er  $x = 4600$  et profittmaksimerende kvantum.
- b) For  $x = 3000$  er grensekostnad lik grenseinntekt, men dette ligger utenfor gyldighetsområdet (definisjonsområdet) for modellen. Vi ser at  $\pi'(x) = 30 - 0,01x$  er positiv for  $x < 3000$  som gir at profittfunksjonen er voksende for  $x$  i intervallet  $[0, 2000]$  og dermed er  $x = 2000$  et profittmaksimerende kvantum.

### Oppgave 5

- a)  $K_4, K_1, K_3, K_2$
- b)  $K_4 : x = 220$ ,  $K_1 : x = 120$ ,  $K_3 : x = 270$ ,  $K_2 : x = 40$
- c)  $A_4(220) = \frac{112}{220} = 0,51$ ,  $A_1(120) = \frac{65}{120} = 0,54$ ,  $A_3(270) = \frac{165}{270} = 0,61$ ,  $A_2(40) = \frac{35}{40} = 0,88$

### Oppgave 6 (Flervalgseksamen 2017v, oppg 4)

C

### Oppgave 7 (Flervalgseksamen 2016h, oppg 14)

D

### Oppgave 8 (Flervalgseksamen 2015h, oppg 15)

D