MAT 1180, 13. forelesning, 11. okt. 2022, Runar Ile

Plan
1. Rasjonale funksjoner og asymptoter (kap 3.9)
2. Hyperbler (kap. 3.9)

1. Rasjonale funksjoner og asymptoter

Rasjonal funksjon $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ polynomer

Eks $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+3}$ – vil finne ut hva som skjer når x er stor

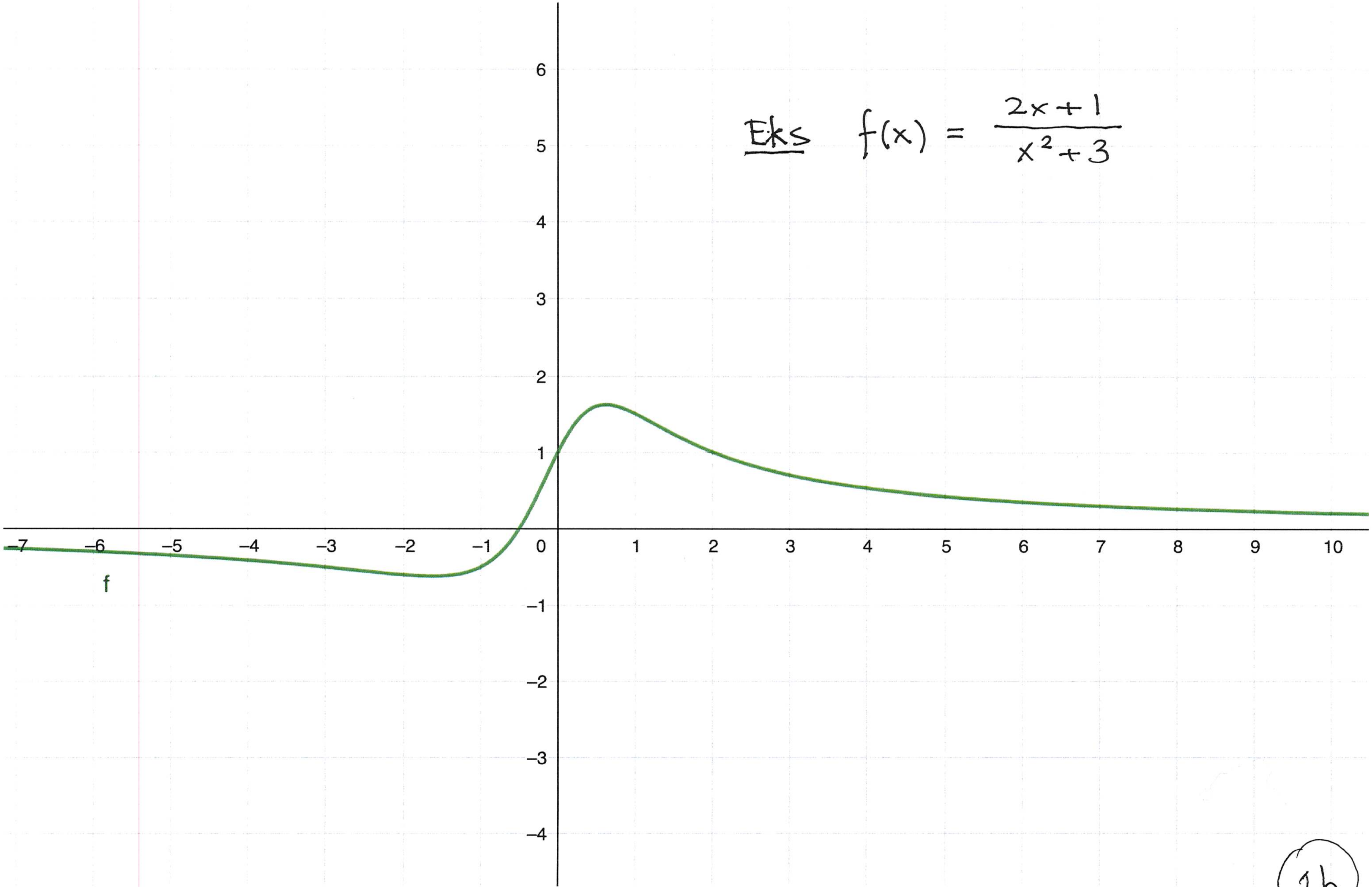
– deler på x^2: både teller og nevner

$$= \frac{\frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} \xrightarrow[x \to \infty]{} \frac{0}{1} = 0$$

$$f(1000) = \frac{\frac{2}{1000} + \frac{1}{1000^2}}{1 + \frac{3}{1000^2}} = 0,00200099\ldots$$

Dette betyr at linjen $y=0$ (x fri) er en horisontal asymptote for $f(x)$.

Så grafen til $f(x)$ nærmer seg x-aksen når x blir stor pos/neg.



1b

Eks $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x-5)}$ $\quad (x \neq 1\,,\ x \neq 5)$

Hva skjer med $f(x)$ når x nærmer seg 1 eller 5 ?

Hvis $x \longrightarrow 1^-$ („x nærmer seg 1 nedenfra")

$x = 0{,}9\,,\quad x = 0{,}99\,,\quad x = 0{,}999$

da vil

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \longrightarrow 0^- \\ x-5 \longrightarrow -4^- \\ 2x+1 \longrightarrow 3^- \end{array}\right\} \text{medfører at } f(x) = \frac{\overbrace{2x+1}^{3^-}}{\underbrace{(x-1)}_{0^-}\underbrace{(x-5)}_{-4^-}} \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$$

Hvis $x \longrightarrow 1^+$ („x nærmer seg 1 ovenfra"

$x = 1{,}1\,,\quad x = 1{,}01\,,\quad x = 1{,}001$

da vil

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \longrightarrow 0^+ \\ x-5 \longrightarrow -4^+ \\ 2x+1 \longrightarrow 3^+ \end{array}\right\} \text{medfører at } f(x) = \frac{\overbrace{2x+1}^{3^+}}{\underbrace{(x-1)}_{0^+}\underbrace{(x-5)}_{-4^+}} \xrightarrow[x \to 1^+]{} -\infty$$

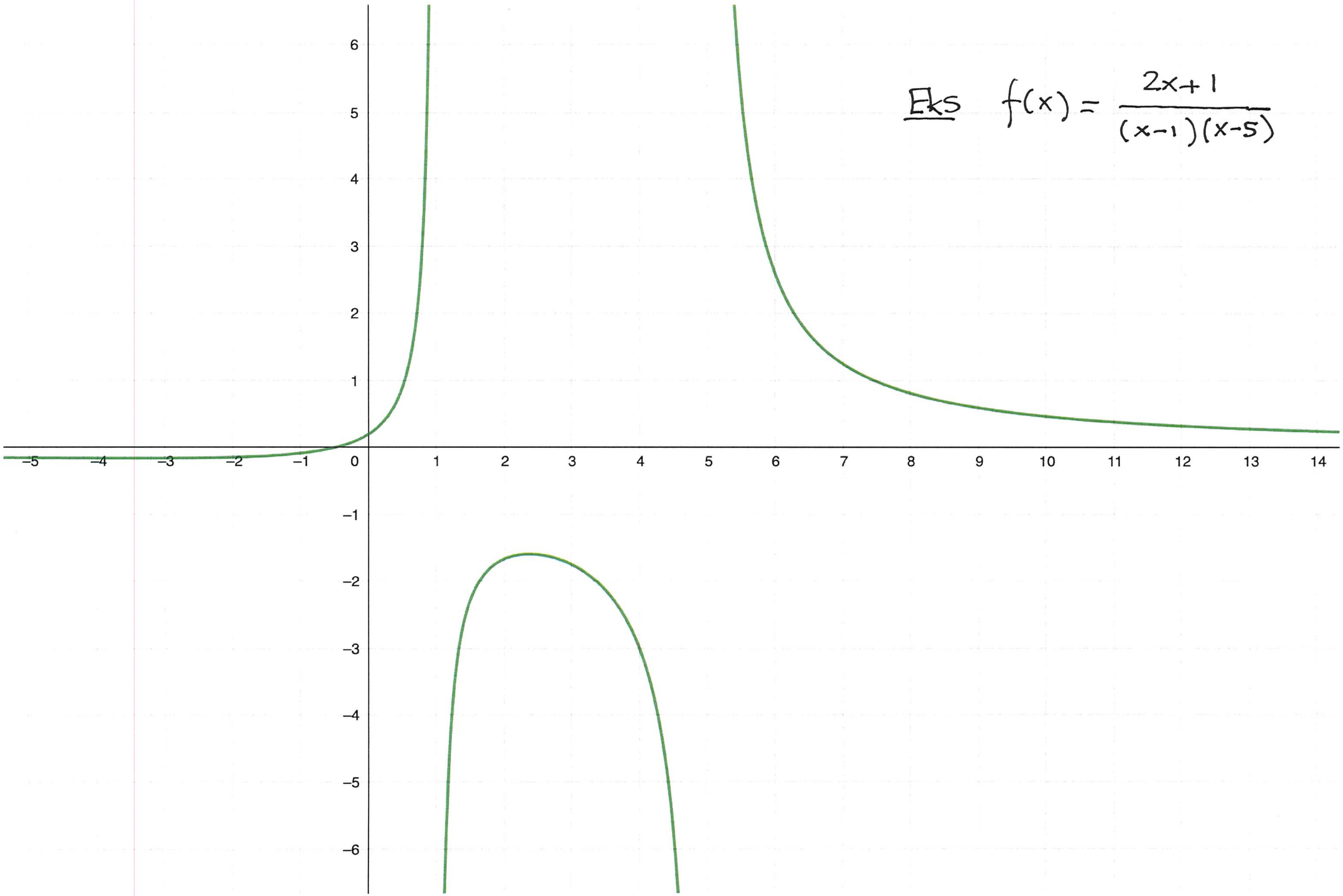
Konklusjon Linjen $x = 1$ (y fri) er en vertikal asymptote for $f(x)$.

Så grafen til $f(x)$ nærmer seg den vertikale linjen $x = 1$ når $x \to 1$.

Merk Linjen $x = 5$ er også en vertikal asymptote for $f(x)$.

$f(x)$ har også den horisontale asymptoten $y = 0$.

__Eks__ $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x-5)}$



Skrå asymptoter

EKS $f(x) = x - 5 + \frac{2}{x-4}$ har vertikal asymptote $x = 4$.

Setter $g(x) = x - 5$

Da vil grafen til $f(x)$ nærme seg grafen til $g(x)$ (en skrå linje) når $x \longrightarrow \pm\infty$ fordi

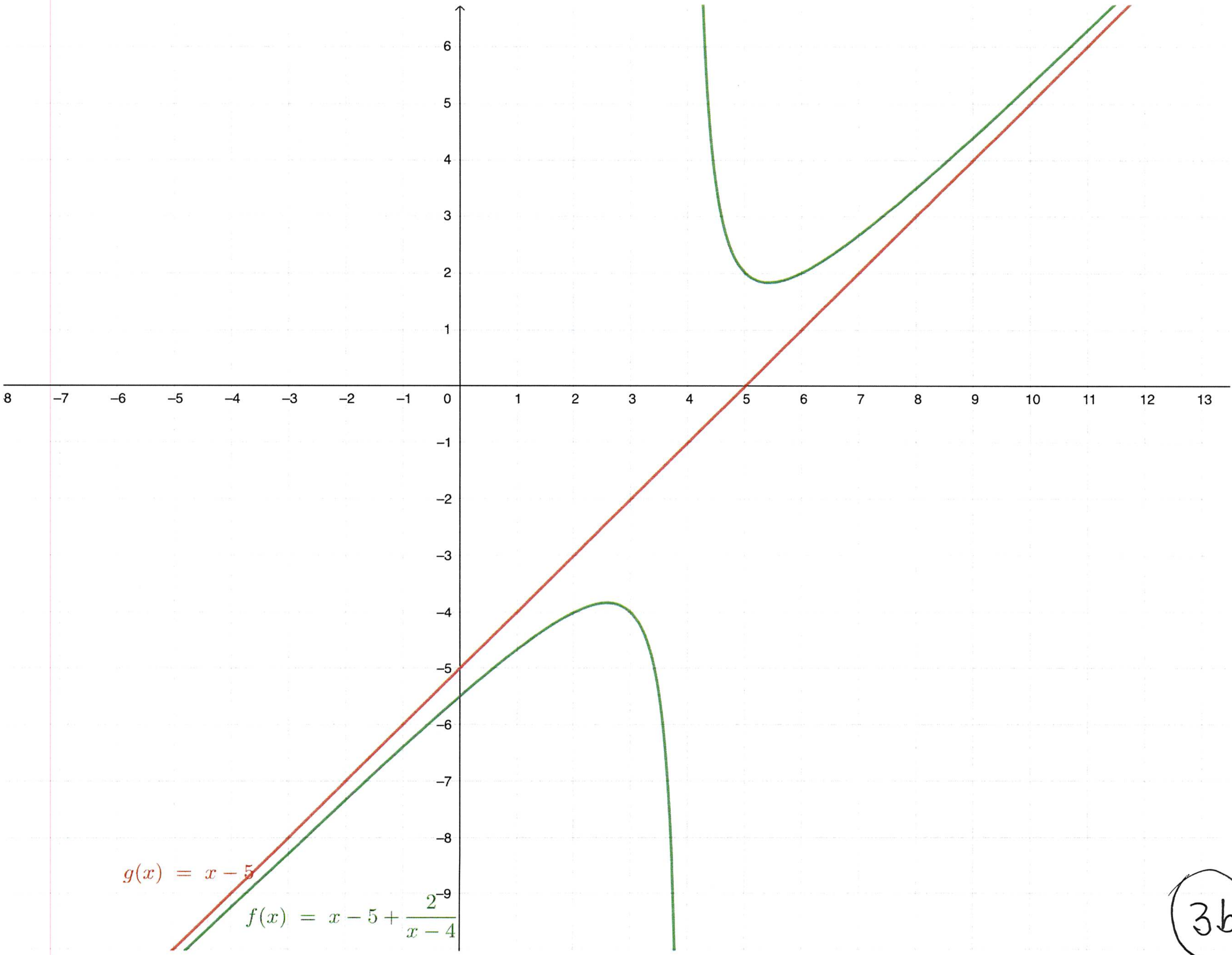
$$f(x) - g(x) = \frac{2}{x-4} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

NB $f(x) = \frac{(x-5)(x-4)+2}{(x-4)} = \frac{x^2 - 9x + 22}{x-4}$

- bruker polynomdivisjon for å få formen $x - 5 + \frac{2}{x-4}$

$\boxed{\text{Start: 15.08}}$

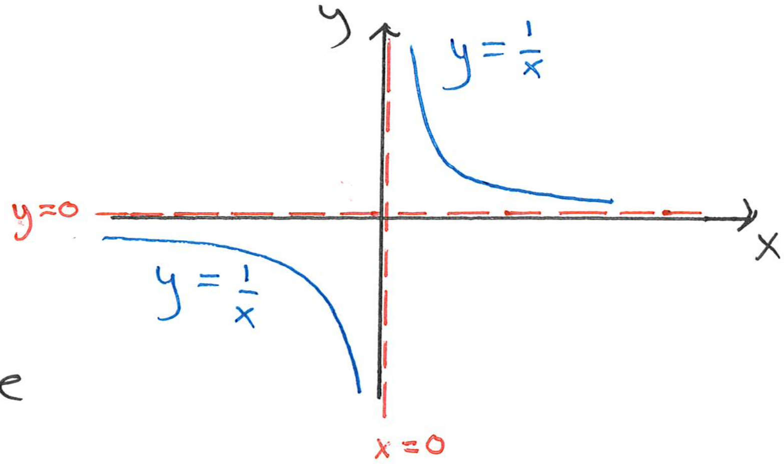
Grafen til $g(x)$ er en skrå asymptote for $f(x)$.



3b

2. Hyperbler

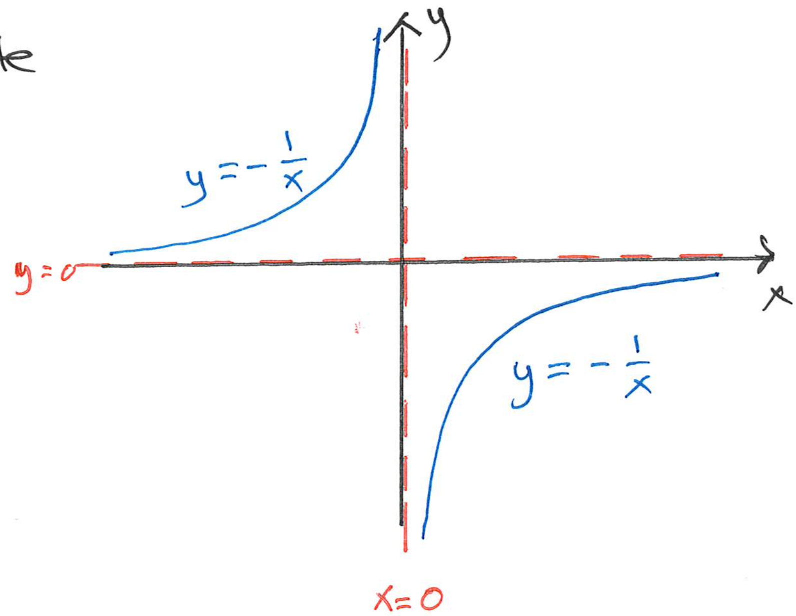
<u>Eks</u> $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$



Linjen $x = 0$ er en vertikal asymptote

Linjen $y = 0$ er en horisontal asymptote

<u>Eks</u> $f(x) = -\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$



Linjen $x = 0$ er en vertikal asymptote

Linjen $y = 0$ er en horisontal asymptote

<u>Definisjon</u> En funksjon $f(x)$ er en <u>hyperbelfunksjon</u> hvis den kan skrives på formen

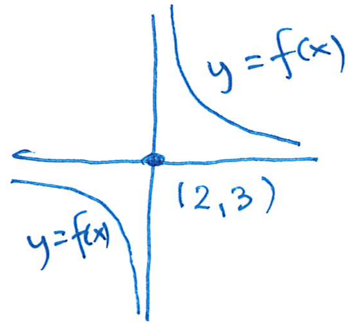
$$f(x) = c + \frac{a}{x-b} \qquad (a \neq 0)$$

<u>Eks</u> $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$ er en hyperbelfunksjon fordi polynomdivisjon gir

$$(3x - 5) : (x - 2) = 3 + \frac{1}{x-2}$$
$$\frac{-(3x-6)}{1} \xleftarrow{\cdot (x-2)}$$

så $a = 1$
$b = 2$
$c = 3$

Så $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-2}$



og $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to 2^-]{} -\infty$

og $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to 2^+]{} +\infty$

Så linjen $x = 2$ er en vertikal asymptote

Dessuten: $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 3$

så linjen $y = 3$ er en horisontal asymptote.

$f(1) = 3 + \dfrac{1}{1-2} = 2$

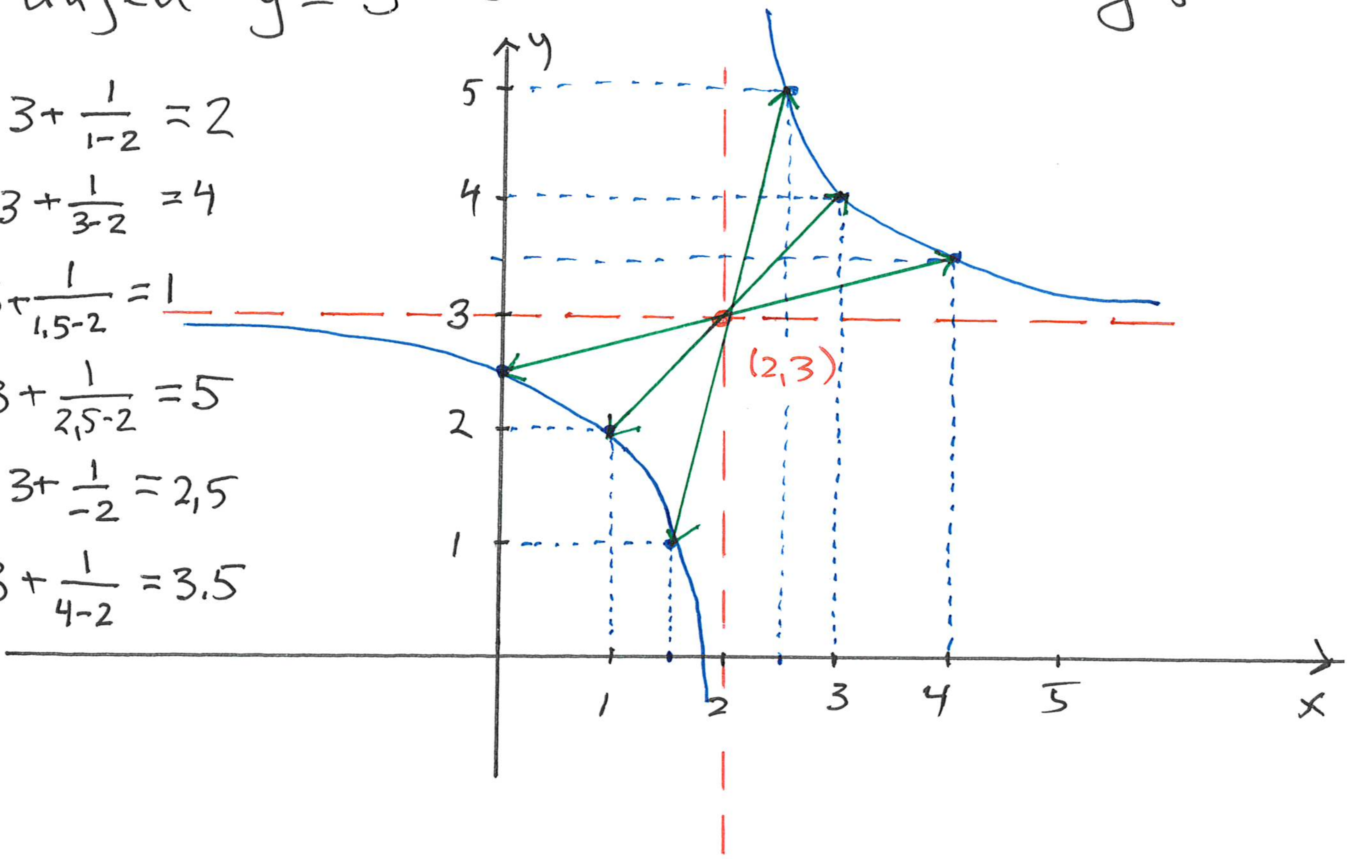
$f(3) = 3 + \dfrac{1}{3-2} = 4$

$f(1{,}5) = 3 + \dfrac{1}{1{,}5-2} = 1$

$f(2{,}5) = 3 + \dfrac{1}{2{,}5-2} = 5$

$f(0) = 3 + \dfrac{1}{-2} = 2{,}5$

$f(4) = 3 + \dfrac{1}{4-2} = 3.5$



Grafen er symmetrisk om skjæringspunktet til asymptotene!

2019 vår Flervalg

Problem 5

We have the hyperbola function $f(x) = \dfrac{4x-38}{x-10}$. Which of the graphs in figure 1 is the graph of $f(x)$?

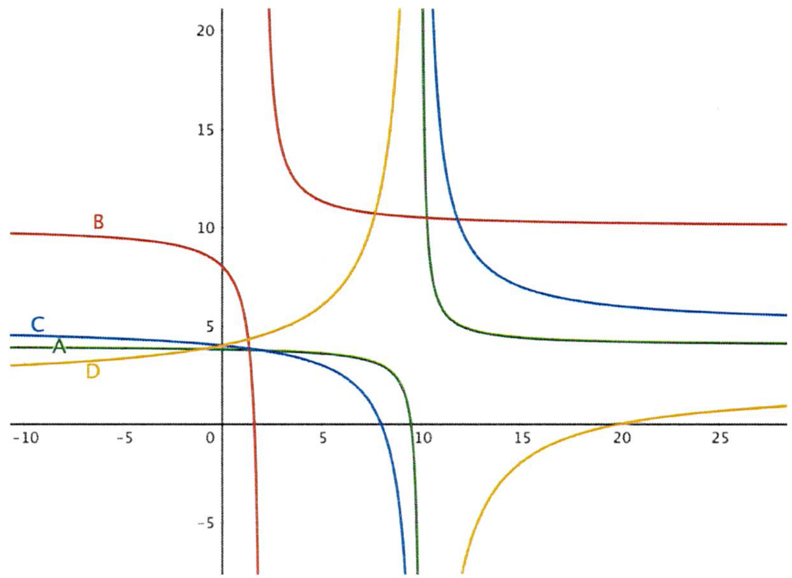


Figure 1: Graphs A-D

(A) $f(x)$ has the graph A (green)
(B) $f(x)$ has the graph B (red)
(C) $f(x)$ has the graph C (blue)
(D) $f(x)$ has the graph D (yellow)
(E) I choose not to answer this problem.

2019 høst Fagoppgave

Finn uttrykket for hyperbelfunksjonen

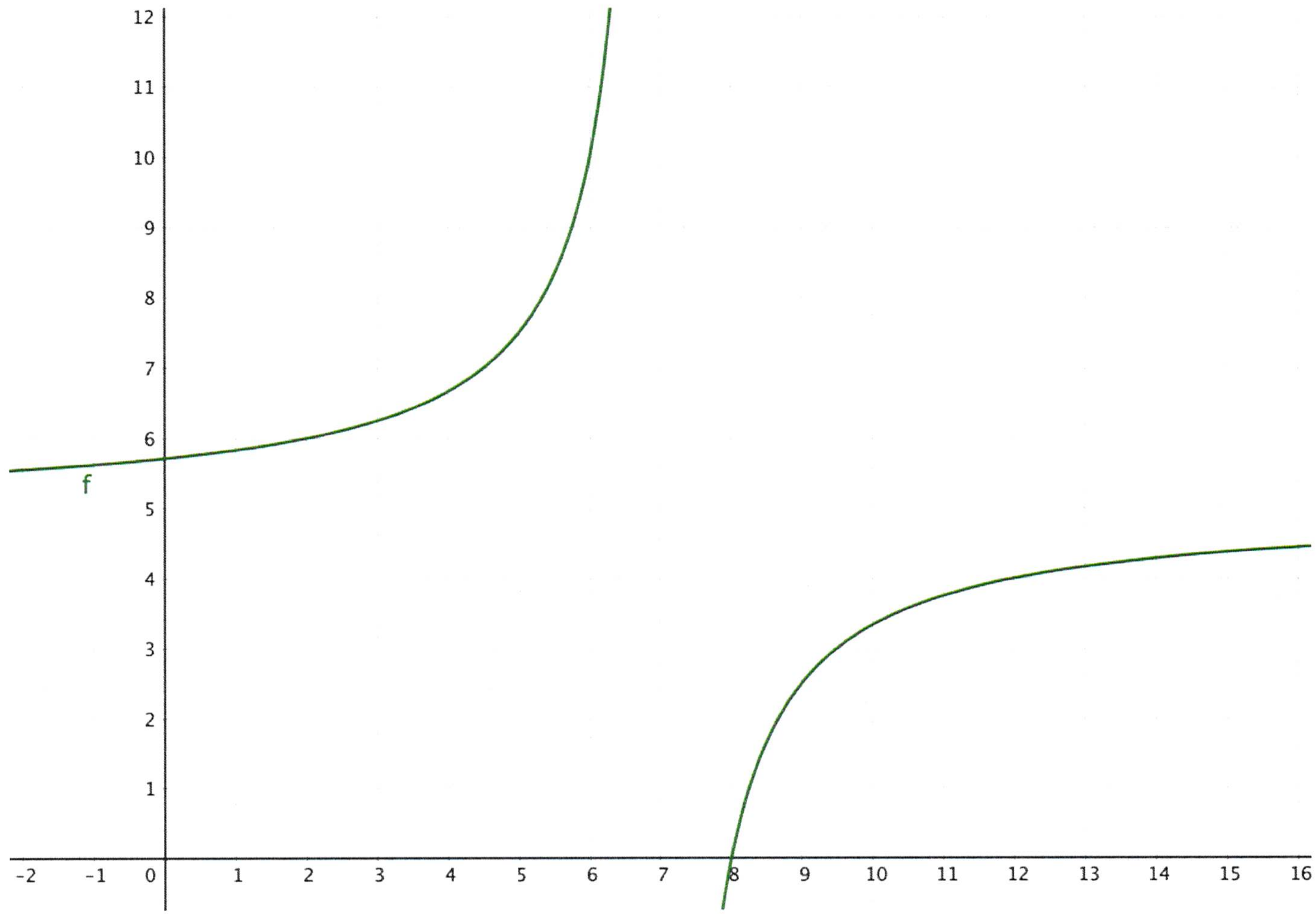


Figure 2: Hyperbola

5c