MET 1180, 17. forelesning, 1. nov. 2022, Runar Ile

Plan: Repetisjon av derivasjon.

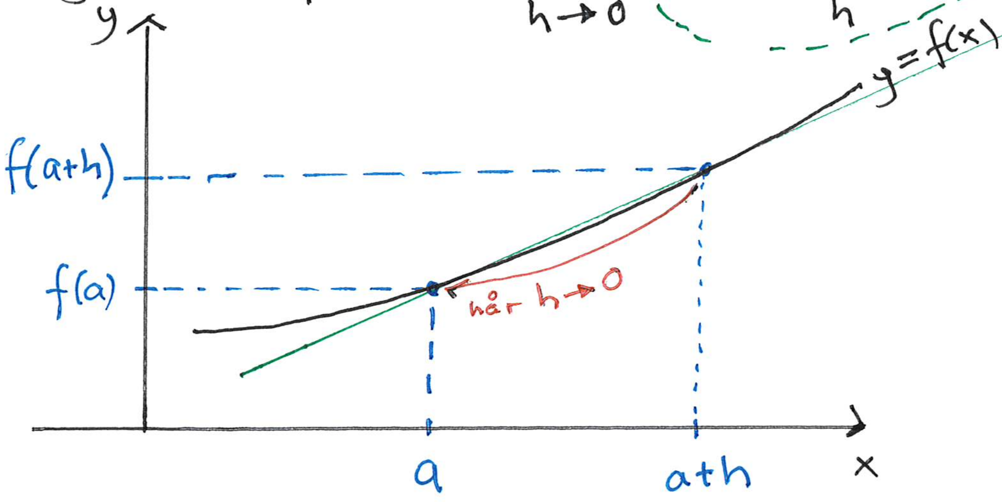
1. Definisjon, stigningstall og grafer
2. Den naturlige logaritmen
3. Derivasjonsregler

1. Rep. av definisjon, stigningstall og grafer

Definisjon

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

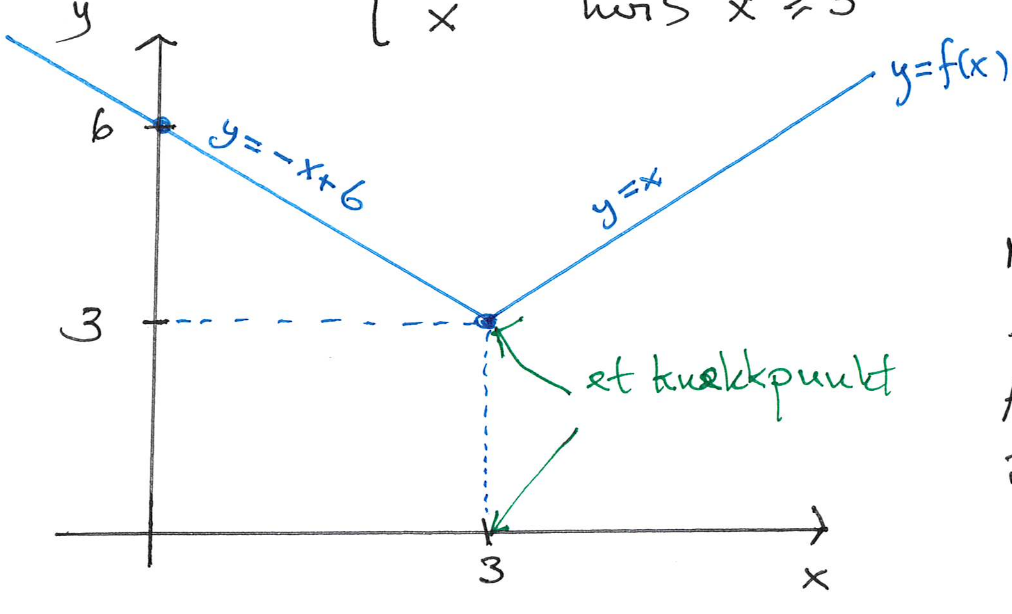
= stigningstallet til denne linjen



Merk Den deriverte finnes ikke alltid!

Eks $f(x) = |x-3| + 3 = \begin{cases} -(x-3)+3 & \text{hvis } x<3 \\ x-3+3 & \text{hvis } x \geq 3 \end{cases}$

$$= \begin{cases} -x+6 & \text{hvis } x<3 \\ x & \text{hvis } x\geq 3 \end{cases}$$



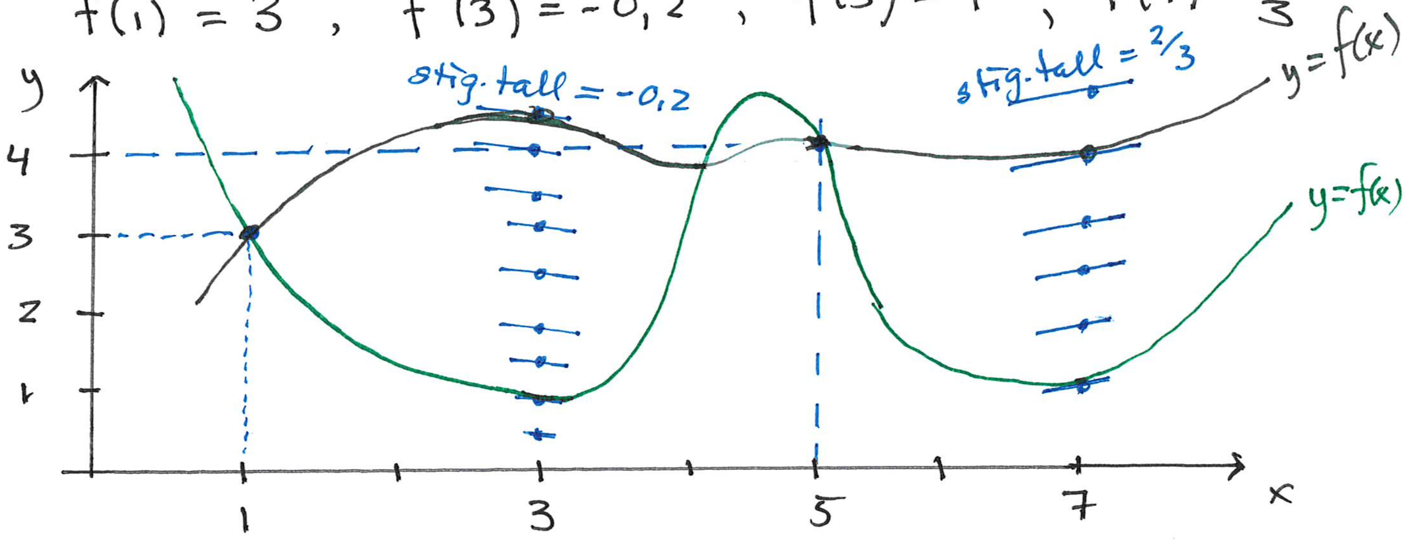
Her er

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{hvis } x<3 \\ 1 & \text{hvis } x>3 \end{cases}$$

Men for $x = 3$ er det ingen tangent. Altså finnes ikke $f'(3)$.

Oppg 1d fra forrige uke. Skissér to grafer.

$f(1) = 3$, $f'(3) = -0,2$, $f(5) = 4$, $f'(7) = \frac{2}{3}$



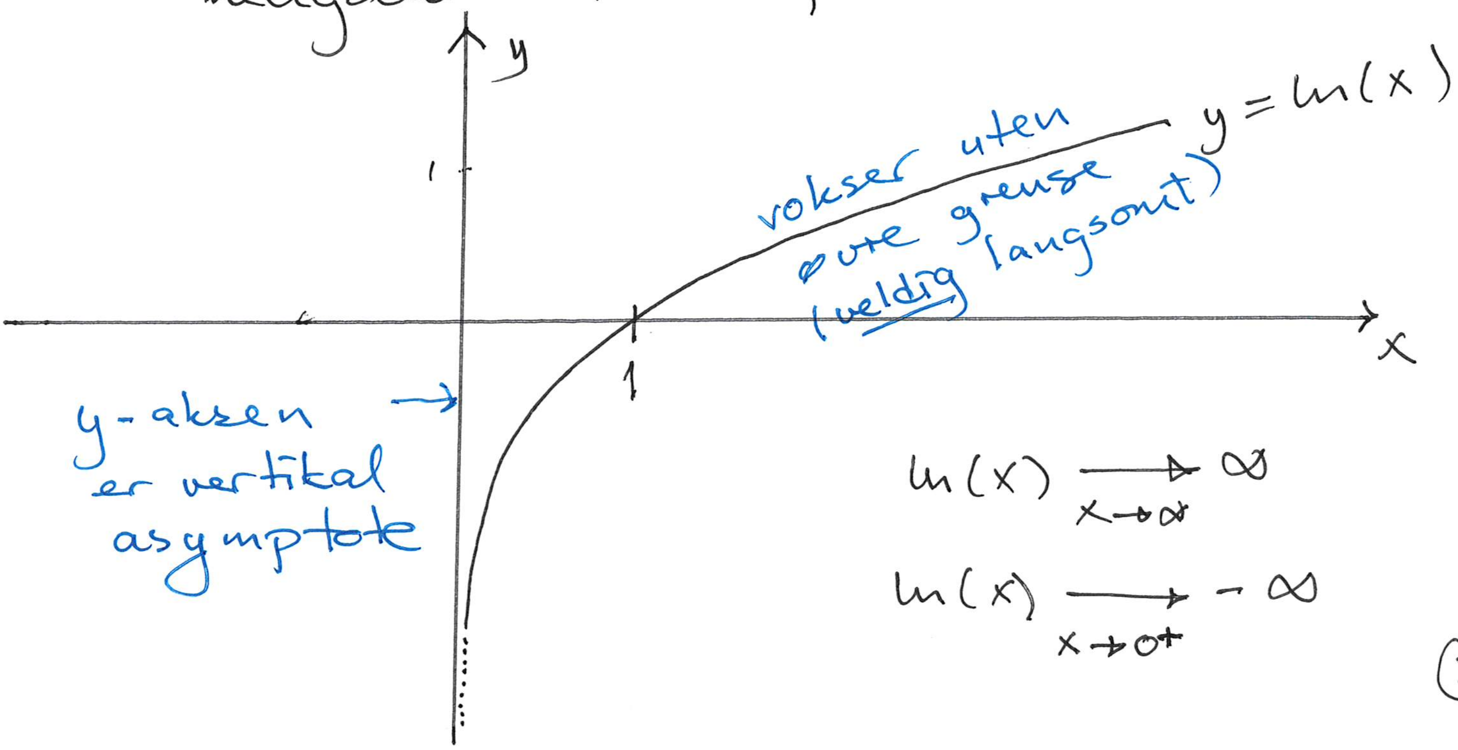
2. Den naturlige logaritmen

ln(x) er den omvendte funksjonen til e^x

så $\ln(e^x) = x$ og $e^{\ln(x)} = x$

Definisjonsområdet til ln(x) er verdimengden til e^x, dvs alle positive tall.

Verdimengden til ln(x) er definisjonsmengden til e^x, dvs alle tall.



$\ln(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

$\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$

Eks

$$\ln\left(\sqrt[10]{e}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{10}}\right) = \frac{1}{10}$$

$$\ln(3e) = \ln(3) + \ln(e) = \ln(3) + 1$$

$$e^{2\ln(5)} = e^{\ln(5^2)} = 5^2 = 25$$

$$e^{2\ln(5)} = \left(e^{\ln(5)}\right)^2 = 5^2$$

$$e^{\ln(2)+\ln(3)} = e^{\ln(2\cdot 3)} = 2\cdot 3 = 6.$$

Start: 15.05

Merk:

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 1{,}6094}}{\ln(2+3)} \neq \ln(2) + \ln(3)$$

$$\ln(2) + \ln(3) = 0{,}6931 + 1{,}0986 = 1{,}7918$$

Eks

$$\ln(5x) = \ln(5) + \ln(x)$$

$$\ln(x^{10}) = 10\cdot\ln(x)$$

$$\ln\left(\frac{3}{x-1}\right) = \ln(3) - \ln(x-1)$$

3. Derivasjonsregler

Produktregelen $[g(x)\cdot h(x)]' = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)$

Eks $[(x^2+1)\cdot e^x]' = (x^2+1)'\cdot e^x + (x^2+1)\cdot(e^x)'$

$= 2x\cdot e^x + (x^2+1)\cdot e^x$

$= \underline{\underline{(x^2+2x+1)\cdot e^x}}$ null? $x=-1$

Eks $[\sqrt{x}\cdot \ln(x)]' = (x^{\frac{1}{2}})'\cdot \ln(x) + x^{\frac{1}{2}}\cdot[\ln(x)]'$

$= \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}\cdot \ln(x) + x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-1}$

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot \ln(x) + x^{\frac{1}{2}-1}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1/2}}\cdot \ln(x) + \frac{1}{x^{1/2}}$

$= \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$= \underline{\underline{\frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}}}$ null? $x=e^{-2}$ pos? $x>e^{-2}$

Brøkregelen $\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

Eks $\left[\frac{x^2}{x-1}\right]' = \frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}$

$= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \underline{\underline{\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}}}$ - pos? $x>2$ el $x<0$

Oppg $\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \underline{\underline{\frac{1-\ln(x)}{x^2}}}$

- null? $x = e$
- pos? $0 < x < e$

Kjerneregelen $[g(u(x))]' = g'(u)\cdot u'(x)$

hvor $u = u(x)$

Eks $\left[e^{x^2+3x}\right]' = e^u \cdot (2x+3) = \underline{\underline{(2x+3)\cdot e^{x^2+3x}}}$

$u(x) = x^2+3x$ og $g(u) = e^u$

$u'(x) = 2x+3$ $\quad g'(u) = e^u$

null? $x = -1{,}5$

pos? $x > -1{,}5$

Eks $[\ln(x^2+5)]' = \frac{1}{u}\cdot 2x = \underline{\underline{\frac{2x}{x^2+5}}}$

$u(x) = x^2+5$ og $g(u) = \ln(u)$

$u'(x) = 2x$ $\quad g'(u) = \frac{1}{u}$

null? $x = 0$

pos? $x > 0$

Eks $\left[\ln\left(\frac{3x}{x-1}\right)\right]' = [\ln(3x) - \ln(x-1)]'$

$= [\ln(3) + \ln(x) - \ln(x-1)]'$

$u(x) = x-1$ og $g(u) = \ln(u)$

$u'(x) = 1$ $\quad g'(u) = \frac{1}{u}$

$= 0 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \underline{\underline{\frac{-1}{x(x-1)}}}$