MET 1180, 24. forelesning, 24. nov. 2022, Runar Ile

Plan
1. Repetisjon: Elastisitet
2. Lineær approksimasjon
3. Høyere grads Taylorpolynomer
4. Om eksamen
5. Hvordan forberede seg til eksamen

1. Rep.: Elastisitet

Eks p = pris/enhet. Etterspørselsfunksjon $D(p) = 200e^{-0.01p}$

Beregner $\varepsilon(p)$ – elastisitetsfunksjonen

$$D'(p) = -0{,}01 \cdot 200 \cdot e^{-0{,}01p} = -2e^{-0{,}01p}$$

så
$$\varepsilon(p) = \frac{D'(p)\cdot p}{D(p)} = \frac{-2\cancel{e^{-0{,}01p}} \cdot p}{200 \cdot \cancel{e^{-0{,}01p}}} = \underline{\underline{-0{,}01p}}$$

Etterspørselen er elastisk m.h.p. prisen hvis

$\varepsilon(p) < -1$ dvs $-0{,}01p < -1 \quad | \cdot -100$

dvs $\underline{\underline{p > 100}}$

Betydning: Hvis $p > 100$ så vil en liten økning i prisen gi lavere inntekt.

F.eks. $\varepsilon(110) = -0{,}01 \cdot 110 = -1{,}1$, dvs at en prisøkning på 1% gir et etterspørselsfall på 1,1 %

Etterspørselen er uelastisk m.h.p. prisen hvis $\varepsilon(p) > -1$, dvs $-0{,}01p > -1$

så $\underline{\underline{p < 100}}$

Betydning Hvis $p < 100$ vil en liten økning i prisen gi høyere inntekt

F. eks. $\varepsilon(80) = -0{,}01 \cdot 80 = -0{,}8$, så 1 % prisøkning gir 0,8 % etterspørselsfall.

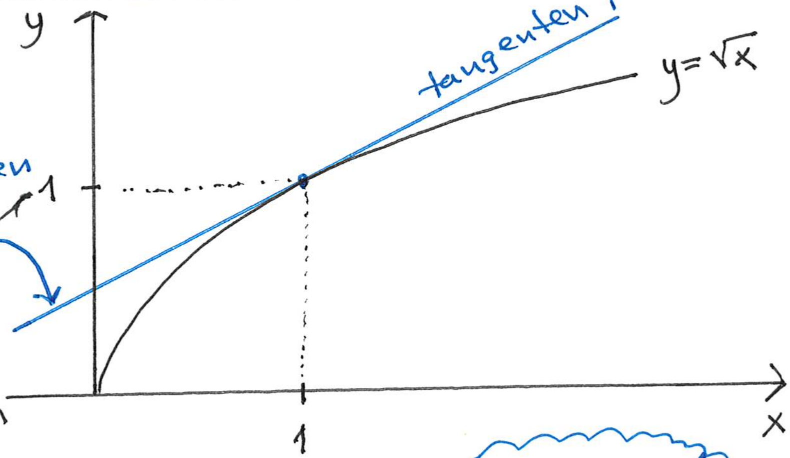
Hvis $\varepsilon(p) = -1$ (så $p = 100$), er etterspørselen nøytralelastisk m.h.p. prisen.

Betydning Ingen (eller veldig liten) endring i inntekt hvis prisen endres litt.

---

2. Lineær approksimasjon

Eks $f(x) = \sqrt{x}$



Den lineære approksimasjonen til $f(x)$ ved $x = 1$

Vi kan finne uttrykket for tangentfunksjonen ved ettpunktsformelen

$$y - 1 = f'(1) \cdot (x - 1)$$

så $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$ $\quad | +1$

dvs $y = \underline{\underline{\underbrace{1}_{= f(1)} + \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{= f'(1)}(x-1)}} = P_1(x)$

– kalles Taylorpolynomet av grad 1 for $\sqrt{x}$ ved $x = 1$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

F. eks. $P_1(1,1) = 1 + \frac{1}{2}(1,1-1) = 1 + 0,5 \cdot 0,1 = 1,05$

(sjekk: $\sqrt{1,1} = 1,04881\ldots$)

3. Taylorpolynomer av høyere grad

Eks $f(x) = \sqrt{x}$.

Da er Taylorpolynomet av grad 2 til $\sqrt{x}$ ved $x = 1$ gitt som

$$P_2(x) = \overbrace{f(1) + f'(1)\cdot(x-1)}^{P_1(x)} + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f''(1) = -\frac{1}{4\cdot 1\cdot\sqrt{1}} = -\frac{1}{4}$$

Start: 9.00

Mønster

$$\boxed{P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}$$

– så $a = 1$ i eks. over.

$$\sqrt{2} = f(2) \approx P_2(2) = 1 + \frac{1}{2}(2-1) - \frac{1}{8}(2-1)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 1,375$$

(sjekk: $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$)

$$P_2(1,2) = 1 + \frac{1}{2}(1,2-1) - \frac{1}{8}(1,2-1)^2$$

$$= 1 + 0,1 - 0,005 = 1,0950$$

(sjekk $\sqrt{1,2} = 1,0954\ldots$)

Eks $f(x) = \sqrt{x}$ ved $x = 1$

Da er Taylorpolynomet til $f(x)$ av grad 3 ved $x = 1$ er

$$P_3(x) = \underbrace{P_2(x)}_{\text{-har allerede gjort denne!}} + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}-1}$$

$$= \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$$

$$f'''(1) = \frac{3}{8 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{1}}$$

$$= \frac{3}{8}$$

$$\frac{\left(\frac{3}{8}\right):6}{6:6} = \frac{3}{8 \cdot 6_2} = \frac{1}{16}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$$

$$P_3(1{,}2) = 1 + \frac{1}{2}(1{,}2-1) - \frac{1}{8}(1{,}2-1)^2 + \frac{1}{16}(1{,}2-1)^3$$

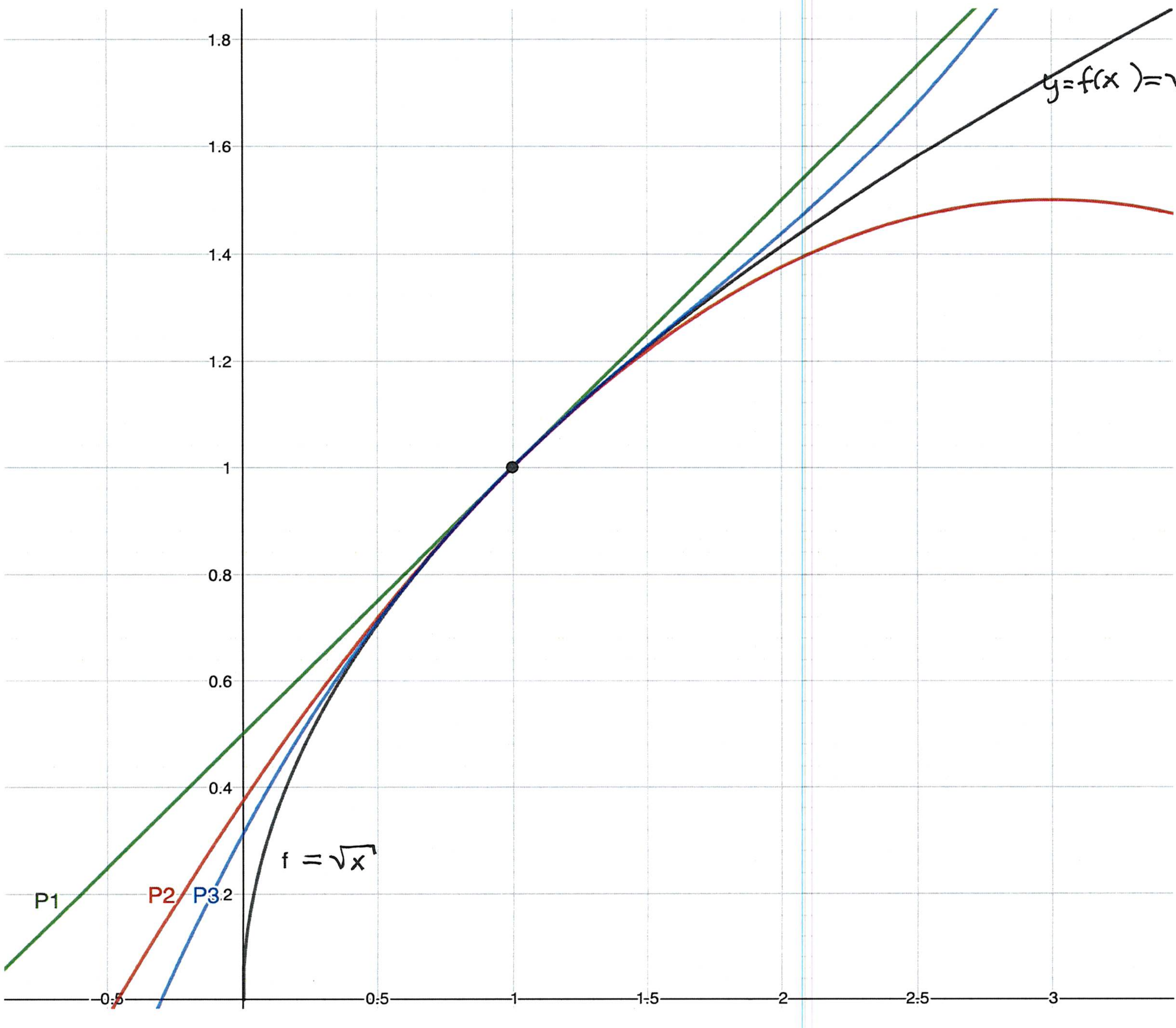
$$= 1{,}0955$$

Mønster (Taylorpolynomer av grad 3)

$$P_3(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}^{P_2(x)} + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$$

Taylorpolynomet av grad n for $f(x)$ ved $x=a$:

$$\boxed{P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{hvor } n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$



1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
$y = f(x) = \sqrt{x}$
$f = \sqrt{x}$
P1
P2
P3

4. Om eksamen

- 12 oppg. med lik vekt (noen har underpunkter i, ii, iii)
- 3 timer (kl. 14-17), finn ut hvor!
- Eksamensoppgaven kommer i wiseflow – da må ta med datamaskin med Flowlock nettleser(?) installert på forhånd!
- Du skriver svarene / løsningene på papir! og leverer papirbesvarelsen
- Jeg sensurerer.
- Alle oppgavene bør være (veldig) gjenkjennelige fra veiledningsoppg. og forelesningene
- Ganske grunnleggende og sentrale temaer i første del (minst)
- Oppgavene er ikke ordnet etter semesterplanen.
- Hjelpemidler på eksamen: BI-kalkulator, linjal.
- Eksamen teller 20% av endelig karakter.

5. Hvordan forberede seg.

1. Relevant stoff:
   - forelesningsnotater
   - veiledningsoppg.
   - tidlige flervalgseksamener
   - også læreboka

2. <u>Mitt beste tips</u>: Prøv å gjøre oppg. i hodet!
   - hva er planen? (i detalj)
   - hva slags kunnskap kreves?
   - hva slags problemer kan oppstå?

3. Hvis jeg får galt svar:
   - hva har gått galt? – planen?
     – utførelsen?

4. Når du har løst en oppgave
   - hva har du lært?

5. Lær de grunnleggende tingene veldig godt!
   - definisjoner, begreper („ord")

6. De grunnleggende (enkle) oppg. er de viktigste.

<u>Eks</u>: $e^x = 5$ og $\ln(x+3) = 0$