Plan

1 Repetisjon og oppgavegjennomgang
2 Frie variabler og løsninger av lineære systemer

① Repetisjon og oppgavegjennomgang

Systemer av likninger ← innsettingsmetoden mm

Lineære systemer ← Gauss-eliminasjon

Oppgave 31

8. $\boxed{\begin{array}{l} 2xy + y^3 + y^2 = 0 \\ x^2 + 3xy^2 + 2xy = 0 \end{array}}$ grad 3, grad 3

Konklusjon:
$(x,y) = (0,0),\ (0,-1),\ (3/25, -3/5)$

$y(2x + y^2 + y) = 0 \qquad y = 0$ eller $2x + y^2 + y = 0$

$x(x + 3y^2 + 2y) = 0 \qquad x = 0$ eller $x + 3y^2 + 2y = 0$

i) $y = 0, x = 0 \longrightarrow (x,y) = (0,0)$

ii) $y = 0,\ x + 3y^2 + 2y = 0 \qquad (x,y) = (0,0)$

iii) $2x + y^2 + y = 0,\ x = 0 \qquad y^2 + y = 0 \qquad y(y+1) = 0 \qquad y = 0,\ y = -1 \qquad (x,y) = (0,0), (0,-1)$

iv) $\boxed{2x + y^2 + y = 0,\ x + 3y^2 + 2y = 0}$

$x = -3y^2 - 2y$

$2(-3y^2 - 2y) + y^2 + y = 0$

$-5y^2 - 3y = 0$

$-y(5y + 3) = 0$

$y = 0,\ y = -3/5$

$y = 0:\ x = 0$

$y = -3/5:$

$x = -3(9/25) - 2(-3/5)$

$= -\frac{27}{25} + \frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 5} = 3/25$

$(x,y) = (0,0),\ (3/25, -3/5)$

Gauss-eliminasjon: Løsningsmetode for lineære system

Metode:
i) Skriv ned utvidet matrise
ii) Bruk elementære radoperasjoner til vi har en trappeform
iii) Skriv ned lehingene som svarer til trappeformen, og løs ved baklengs substitusjon.

Oppgavesett 31, Opps 7

$$x + y + z + w = 10$$
$$x + 2y + 4z - w = 7$$
$$x - y + z + 11w = 16$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 11 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ \\ -1 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 10 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2 \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array}$$

trappeform

$$x + y + z + w = 10$$
$$y + 3z - 2w = -3$$
$$6z + 6w = 0$$

frie variabler = variabler som mangler pivot-posisjon i sin kolonne

Skrivemåte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Koeffisientmatrisen — vektor av konstanter

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 11 & 16 \end{array}\right)$$

utvidet matrise brukes ved Gauss

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ matriseform av det lineære systemet

pivot-posisjoner = posisjonene til pivotene i en trappeform

$$x = 10 - y - z - w = 10 - (5w - 3) - \cancel{(-w)} - \cancel{w} = -5w + 13$$
$$\underline{y} = -3 - 3z + 2w = -3 - 3(-w) + 2w = \underline{5w - 3}$$
$$\underline{6z + 6w = 0} \qquad \frac{6z}{6} = -\frac{6w}{6} \qquad z = \underline{-w}$$

Løsning: $(x, y, z, w) = (-5w + 13,\ 5w - 3,\ -w,\ w)$

der w er fri

Konklusjon: uendelig mange løsninger, én frihetsgrad
(én løsning for hver verdi av w)

Skrivemåte: $w = t$ w er fri $\rightarrow$ setter w lik en parameter

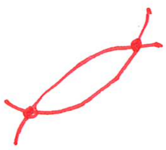
$$(x,y,z,w) = (-5t+13,\ 5t-3,\ -t,\ t) \quad (t \text{ parameter})$$

$$\left.\begin{array}{ll} t=0: & (13,-3,0,0) \\ t=1: & (8,2,-1,1) \\ t=2: & (3,7,-2,2) \\ & \vdots \end{array}\right\} \text{uendelig mange løsn. (en for hver verdi av } t)$$

② Frie variabler og antall løsninger av lineære system

Teorem: Ethvert $m \times n$ lineært system har enten

i) ingen løsninger } inkonsistent
ii) én løsning (eksakt én løsn.)
iii) uendelig mange løsninger } konsistent



Merk: * enhver matrise kan gjøres om til en trappeform vha elementære radoperasjoner

* pivot-posisjonene er entydig bestemt, og de bestemmer antall løsninger:

i) pivot-posisjon i siste kolonne $\Longleftrightarrow$ ingen løsninger (inkonsistent)

ii) ingen pivot-posisjon i siste kolonne $\Longleftrightarrow$ det fins løsninger (konsistent)
I så fall: a) pivot-posisjon i alle variabelkolonner (ingen frie variabler): én løsning

b) minst én variabelkolonne uten pivot-posisjon (minst én fri variabel): uendelig mange løsninger

Eks:

$$x+y+z+w=17$$
$$x-y+z=11$$
$$3x+y+3z+2w=49$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 17 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 49 \end{array}\right) \quad \cdot(-1),\ \cdot(-3) \qquad 49 \leftarrow 45$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \quad \cdot(-1) \qquad -2 \leftarrow -6$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \qquad 4 \leftarrow 0$$

trappeform

$$0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+0\cdot w=4$$

Ingen løsning

$$3x+y+3z+2w=45\ !$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

trappeform

konsistent

to frihetsgrader

(z, w fri)

$\Rightarrow$ uendelig mange løsn.

$$x+y+z+w=17$$
$$-2y\quad -w=-6$$

$$\frac{-2y}{-2}=\frac{-6+w}{-2} \qquad y=3-w/2$$

$$x=17-(3-w/2)-z-w$$
$$=14-z-w/2$$

Løsning: $(x,y,z,w)=(14-s-t/2,\ 3-t/2,\ s,\ t)$ med $z=s$, $w=t$

(s,t parametre)

Ex:
$$\begin{aligned} x + 2y - az &= a-1 \\ ax + 2y - z &= 3 \\ x + (a+1)y - z &= 3 \end{aligned}$$

3x3 lineært system der
x, y, z: variabler
a: parameter

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & a-1 \\ a & 2 & -1 & 3 \\ 1 & a+1 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -a \\ -1 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & a-1 \\ 0 & 2-2a & a^2-1 & 3 - a(a-1) \\ 0 & a-1 & a-1 & 3-(a-1) \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} -a^2+a+3 \\ 4-a \end{array}$$

$a \neq 1$?

$a = 1$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$
ingen løsn.

Kan gjøres ved Gauss, men nokså kronglete:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & a-1 \\ 0 & 2-2a & a^2-1 & -a^2+a+3 \\ 0 & a-1 & a-1 & 4-a \end{array}\right) \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}(2-2a) + (a-1) = 1-a+a-1 = 0$$

$$a-1+\tfrac{1}{2}(a^2-1) = a^2/2 + a - 3/2$$
$$4-a+\tfrac{1}{2}(-a^2+a+3) = -a^2/2 - a/2 + 11/2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & a-1 \\ 0 & 2-2a & a^2-1 & -a^2+a+3 \\ 0 & 0 & a^2/2+a-3/2 & -a^2/2-a/2+11/2 \end{array}\right) \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & a-1 \\ 0 & 2-2a & a^2-1 & -a^2+a+3 \\ 0 & 0 & \underset{(a+3)(a-1)}{\underset{\parallel}{a^2+2a-3}} & -a^2-a+11 \end{array}\right)$$

$a \neq -3$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & a-1 \\ 0 & 2-2a & a^2-1 & -a^2+a+3 \\ 0 & 0 & (a+3)(a-1) & -a^2-a+11 \end{array}\right)$$
én løsn.

$a = -3$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$
ingen løsn.

<u>Konkl:</u> $a = 1, -3$: ingen løsning

$a \neq 1, -3$: Én løsn. (komplisert å finne x, y, z som uttrykk i a)