Plan

1. Metoder for å beregne determinanter
2. Determinanter, lineære systemer og Kramers regel

A ($n\times n$-matrise) $\rightsquigarrow$ $\det(A) = |A|$ (et tall)

Eks: $n=2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot 4 = \underline{-5}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{ad - bc}$

Liknings-systemer: (1) $ax = b$ $\qquad A = (a) \quad \det(A) = a$

- $\underline{a \neq 0}$: $x = b/a$ én løsn.
- $\underline{a = 0}$: $0\cdot x = b$
  - $\underline{b \neq 0}$: ingen løsn.
  - $\underline{b = 0}$: uendelig mange løsn (alle x)

(2) $x + y = 4$, $x + ay = 6$ $\rightarrow$ $A\cdot \underline{x} = \underline{b}$ matrisesystem

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ $\quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & a & 6 \end{array}\right)$ -1

utvidet matrise

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & a-1 & 2 \end{array}\right)$

- $\underline{a=1}$: ingen løsn.
- $\underline{a \neq 1}$: én løsn.

$|A| = 1\cdot a - 1\cdot 1 = a - 1$

- $\underline{|A| = 0}$: $a - 1 = 0$ $\underline{a = 1}$ ingen eller uendelig mange løsn.
- $\underline{|A| \neq 0}$: én løsn. $\underline{a \neq 1}$

$x + y = 4$, $(a-1)y = 2$ $\qquad \underline{y = 2/(a-1)}$ $\quad x = 4 - \frac{2}{a-1} = \frac{4(a-1)-2}{a-1} = \underline{\frac{4a-6}{a-1}}$

① Metoder for å beregne determinant

$A \rightsquigarrow \det(A) = |A|$

$n \times n$-matrise — et tall

$n=1$: $A = (a) \Rightarrow \det(A) = a$

$n=2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \underline{ad-bc}$

$\underline{n>2}$: Metode: Kofaktor utvikling

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Kofaktor utvikling langs første rad

C_{ij}: Kofaktor i posisjon (i,j) = rad i, kol. j

$$|A| = 1 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{13}$$

$$= 1 \cdot (+1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 1(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot (+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2 \cdot 9 - 3 \cdot 4) - (1 \cdot 9 - 1 \cdot 4) + (1 \cdot 3 - 1 \cdot 2)$$

$$= 6 - 5 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Fortegn: ± 1

$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Minor: determinanten til matrisen vi får ved å stryke rad i, kol. j.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{2 \quad 4} \\ 1 & \boxed{3 \quad 9} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Kofaktorutvikling langs andre kol.

$$|A| = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -5 + 2 \cdot 8 - 3 \cdot 3$$

$$= -5 + 16 - 9 = \underline{\underline{2}}$$

Resultat:

Kofaktorutvikling langs enhver rad eller kolonne i en $n \times n$-matrise A gir samme svar, $|A|$.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$|A| = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \ldots$$

$$|A| = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = +1\left(+1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\right) = (+1)\cdot(+1)\cdot(3)\cdot(5)$$

$$= \underline{\underline{15}}$$

Defn: En matrise kalles øvre triangulær hvis alle koeff. under diagonalen er null.

Merk: 1) Determinanten til en øvre triangulær matrise er produktet av koeff. på diagonalen.

2) Trappeformer er alltid øvre triangulære.

Alternativ metode: Gauss-eliminasjon

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = B \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = C$

$|A| = |C| = \underline{\underline{2}}$

trappeform (øvre triang.)

$|C| = 1 \cdot 1 \cdot 2 = \underline{2}$

Resultat: Hvis $A \to B$ er en elementær radoperasjon, så har vi:

i) Hvis vi bytter om to rader: $|B| = -|A|$

ii) Hvis vi mult. en rad med $c \neq 0$: $|B| = c \cdot |A|$

iii) Hvis vi legger til et mult. av en rad til en annen rad: $|B| = |A|$

Eks: $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 7 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix} = 1\cdot(-1)\cdot 4 + 7 \cdot 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 0 - 2\cdot(-1)\cdot 4 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 7$

$= -4 + 8 - 84 = \underline{-80}$

NB! Denne metoden virker kun for 3x3-matriser.

② Determinanter, lineære systemer og Kramers regel

Et lineært system som er $n \times n$:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \longrightarrow$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n$$

Matriseform: $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

koeff. matrisen

Regn ut $|A|$:

Utvidet matrise:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Resultat:

Et lineært system ($n \times n$) med koeff. matrise A ($n \times n$) har:

én løsning $\iff |A| \neq 0$

$\left.\begin{array}{c}\text{ingen løsning} \\ \text{eller} \\ \text{uendelig mange} \\ \text{løsninger}\end{array}\right\} \iff |A| = 0$

Eks: $$\begin{aligned} x + 2y - az &= a-1 \\ ax + 2y - z &= 3 \\ x + (a+1)y - z &= 3 \end{aligned}$$

3x3 lin sys. parameter a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a+1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-a) \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 + (a+1) - 2(-a+1) - a\left(a(a+1) - 2\right)$$

$$= -2 + a + 1 + 2a - 2 - a^3 - a^2 + 2a = \underline{-a^3 - a^2 + 5a - 3}$$

$|A| = 0$: Unntak, ingen eller uend. mange løsn.

$$-a^3 - a^2 + 5a - 3 = 0$$

a=1 er løsn.

$$(a-1)(-a^2 - 2a + 3) = 0$$

$a=1$ eller $-a^2 - 2a + 3 = 0$

$$a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$(a+3)(a-1) = 0$$

$a=-3$ eller $a=1$

Unntak: $a=1$ og $a=-3$

(ingen eller uendelig mange løsninger → sett inn $a=1$ og $a=-3$ og bruk Gauss).

$|A| \neq 0$: $a \neq 1, -3$ én løsning

Kramers regel:

$$x = \frac{|A_x(\underline{b})|}{|A|} = \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|}$$

$$y = \frac{|A_y(\underline{b})|}{|A|} = \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|}$$

$$z = \frac{|A_z(\underline{b})|}{|A|} = \frac{|A_3(\underline{b})|}{|A|}$$

$A_x(\underline{b})$ " $A_1(\underline{b})$: bytt ut x-kolonnen (første kolonne) i A med $\underline{b}$

(tilsvarende for y, z)