Plan

1 Repetisjon og oppgavegjennomgang
2 Vektorer, vektorregning og vektorlikninger

Repetisjon:

$\underset{n\times n}{A} \rightsquigarrow \det(A) = |A|$

Metode: Kofaktorutvikling / Gauss

Antall løsn:

$A\underline{x} = \underline{b}$, $\underset{n\times n}{A}$

$|A| \neq 0$: én løsning og $x_i = \dfrac{|A_i(\underline{b})|}{|A|}$ (Kramers regel)

$|A| = 0$: ingen løsn / uendelig mange løsn.

Oppgaveark 33:

6. • $A \longrightarrow B$ (legge til mult. av en rad til en annen rad) $|A| = |B|$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$

$|A| = 1 - 4 = -3$
$|B| = 4 - 1 = 3$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \to \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$

$|A| = 24 - 28 = -4$
$|B| = 6 - 7 = -1$

Merk:

i) En matrise med en null-rad har $\underline{\det = 0}$.
ii) En matrise med to like rader har $\underline{\det = 0}$
iii) En matrise med en rad som er et mult. av en annen rad har $\underline{\det = 0}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot (-1) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot (-2) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. $(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \odot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \odot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \odot & \cdot & \cdot & 0 \end{array}\right)$

– ingen pivot i siste kol. ⇒ konsistent

– maks. tre pivot-pos ⇒ minst to frihetsgrader

uendelig mange løsninger

10. $A\underline{x} = \underline{b}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2-s & 3 & 3 \\ 3 & 2-s & 3 \\ 3 & 3 & 2-s \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ s+4 \\ 1-2s \end{pmatrix}$

(3x3 lin. sys. m/ param. s)

a) $(A|\underline{b}) \xrightarrow{s=8} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 & 12 \\ 3 & 3 & -6 & -15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 6 & 15 \\ 3 & -6 & 3 & 12 \\ 3 & 3 & -6 & -15 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 6 & 15 \\ 0 & -9 & 9 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$-3x - 3y + 6z = 15$

$-9y + 9z = 27$

z fri

$\frac{-9y}{-9} = \frac{27 - 9z}{-9} \qquad y = -3 + z$

$\frac{-3x}{-3} = 15 + 3(-3+z) - 6z = \frac{6 - 3z}{-3}$

$x = -2 + z$

Løsning: uendelig mange løsninger

$(x, y, z) = (z-2, z-3, z)$

der z er fri

b) $|A| = \begin{vmatrix} 2-s & 3 & 3 \\ 3 & 2-s & 3 \\ 3 & 3 & 2-s \end{vmatrix} = (2-s) \cdot \begin{vmatrix} 2-s & 3 \\ 3 & 2-s \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2-s \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & \cancel{2-s}\ 3 \\ 3 & \cancel{2-s}\ 3 \end{vmatrix}$

$= (2-s) \cdot ((2-s)^2 - 3^2) - 3(3(2-s) - 9) + 3(9 - 3(2-s))$

$= (2-s)(s^2 - 4s - 5) - 3(-3s - 3) + 3(3s + 3)$

$$= (2-s)\underbrace{(s^2-4s-5)}_{(s+1)(s-5)} + \underbrace{9s+9}_{9\cdot(s+1)} + \underbrace{9s+9}_{9\cdot(s+1)}$$

$$s^2-4s-5=0$$
$$s=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(-5)}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{4\pm 6}{2}$$
$$(s+1)(s-5)$$

$$= (s+1)\cdot\big((2-s)(s-5)+9+9\big)$$
$$= (s+1)(-s^2+7s+8) = -(s+1)(s^2-7s-8)$$
$$= -(s+1)(s-8)(s+1)$$
$$= -(s+1)^2\cdot(s-8) = -s^3+6s^2+15s+8$$

c) Fra teori:

$|A|\neq 0$: én løsn. $\Leftrightarrow s\neq -1,8$

$|A|=0$: ingen / uendelig m. løsn. $\Leftrightarrow s=-1,8$

$s\neq -1,8$:
$$x=\frac{|A_1(b)|}{|A|}=\frac{0}{-(s+1)^2(s-8)}=0$$
(Kramers regel)

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ s+4 & 2-s & 3 \\ 1-2s & 3 & 2-s \end{vmatrix} = 3(s^2-4s-5)-3\big((s+4)(2-s)-3(1-2s)\big)$$
$$+3\big(3(s+4)-(2-s)(1-2s)\big)$$
$$= 3s^2-12s-15-3(-s^2+4s+5)$$
$$+3(-2s^2+8s+10)$$
$$= \cancel{3s^2}-\cancel{12s}-\cancel{15}+\cancel{3s^2}-\cancel{12s}-\cancel{15}-\cancel{6s^2}+\cancel{24s}+\cancel{30}$$
$$=0$$

Hint:
$$\begin{vmatrix} 2-s & 3 & 3 \\ 3 & 2-s & 3 \\ 3 & 3 & 2-s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 3 & 3 \\ 3 & t & 3 \\ 3 & 3 & t \end{vmatrix}$$

$t = 2-s$

$$= t\cdot(t^2-9) - 3(3t-9) + 3(9-3t) = t^3 - 9t - 9t + 27 + 27 - 9t$$

$$= \underline{t^3 - 27t + 54}$$

$$= t(t-3)(t+3) - 3\cdot 3(t-3) + 3\cdot 3(3-t)$$
$$= (t-3)\left(t(t+3) - 9 + 9\cdot(-1)\right)$$
$$= (t-3)(t^2+3t-18) = (t-3)(t-3)(t+6)$$
$$= (t-3)^2(t+6) = 0 \quad t=3 \text{ eller } t=-6$$

$2-s=3$, $s=-1$; $2-s=-6$, $s=8$

② Vektorer:

Defn: En kolonnevektor er en matrise med en kolonne

Eks: $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -15 \end{pmatrix}$

Vanlig å skrive vektorer som en bokstav med strek under, (likeså) evt $\vec{b}$ eller $\mathbf{b}$ (bold face).

Kalles også en 3-vektor eller en vektor.

Regning med vektorer:

i) Addisjon / subtraksjon: $\underline{u}+\underline{v}$, $\underline{u}-\underline{v}$

(defn. når $\underline{u}$ og $\underline{v}$ har samme størrelse)

Eks: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

ii) Skalarmultiplikasjon: $r\cdot\underline{v}$

(defn. når r er et tall og $\underline{v}$ er en vektor)

Eks: $2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 \\ 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}}$

En <u>linearkombinasjon</u> av vektorene $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_m}$ er et uttrykk på formen

$$r_1 \cdot \underline{v_1} + r_2 \underline{v_2} + \ldots + r_m \cdot \underline{v_m}$$

<u>Eks:</u> Avgjør om vektoren $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ er en linear-kombinasjon av $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, og $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \underline{v_1}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{= \underline{v_2}}$$

$$\underbrace{r_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Linear komb. av } \underline{v_1} \text{ og } \underline{v_2}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{vektor-likning}}$$

<u>Vektorlikn:</u>

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2.4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 7 \\ x_1 + 4x_2 &= 2 \end{aligned}}$$

vektorlikn. = lineært system

$$\begin{array}{cc} \underline{v_1} & \underline{v_2} \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3 \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -10 & 1 \end{array}\right)$$

$$x_1 + 4x_2 = 2$$
$$-10x_2 = 1$$
$$x_2 = \underline{-1/10}$$
$$\cancel{x_1 = 2 + \tfrac{2}{10} = \tfrac{22}{10}}$$

$$x_1 = 2 - 4(-1/10) = 2 + 4/10 = \underline{24/10}$$