Plan

1. Funksjoner i to variabler
2. Grafer og nivåkurver
3. Lineære funksjoner

Rep: $\underset{n\times n}{A}$ invertibel $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

I så fall: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{|A|}\cdot \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T$

Husk: $\underset{n\times n}{A}$ Defn: A symmetrisk $\Leftrightarrow A^T = A$

$\text{tr}(A)$ (spor) $= \text{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

Oppgaveark 37

3b) $|A| = \begin{vmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{vmatrix} = t\cdot(t^2-1) = t(t-1)(t+1)$

$|A| = 0$: $t = 0, 1, -1$ $\Leftrightarrow$ ingen / uend. mange løsn.

$|A| \neq 0$: $t \neq 0, 1, -1$ $\Leftrightarrow$ én løsning

bruk Gauss for $t = 0, 1, -1$, se om vi har pivot-posisjon i siste kolonne

4e) $(BAB^{-1})^2 \cdot B^2 = (BA\cancel{B^{-1}})(\cancel{B}A\cancel{B^{-1}})\cancel{B}\cdot B$

$= \underline{BA^2B}$

6 Eksamen 05/2019, Oppg. I

7 " 12/2018, Oppg I

$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

6d $A^7\cdot \underline{x} = b$ har en løsn. $\Leftrightarrow |A^7| \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$ (se b)

$|A^7| = |A|^7$

$A^{-1}\cdot |\ A^7\cdot\underline{x} = \underline{b} \quad A^6\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \ \dots \ \underline{x} = (A^{-1})^7\underline{b} = A^{-7}\cdot\underline{b}$

① Funksjoner i to variabler

Eks:

$f(x,y) = 2x+3y-1$ Lineær fn.

$f(x,y) = x^2+y^2$ polynomfn.

$f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ rasjonal fn.

$f(x,y) = x e^{-y}$

$f(x,y) = 1200\, x^{-1.2} y^{3.4}$

$= 1200 \cdot \dfrac{1}{x \cdot \sqrt[5]{x}} \cdot y^3 \cdot \sqrt[5]{y^2}$

$1.2 = 6/5 = 1 + 1/5$

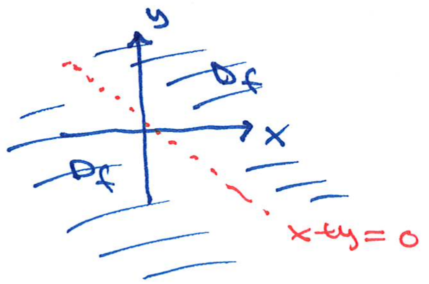
$3.4 = 3 + 2/5$

Defn: Definisjonsområdet D_f = mengden av alle tallpar (x,y) som vi kan sette inn i fn. f

Eks: $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $D_f: x+y \neq 0$

$D_f = \{(x,y) : x+y \neq 0\}$

mengden av alle tallpar (x,y) slik at $x+y \neq 0$

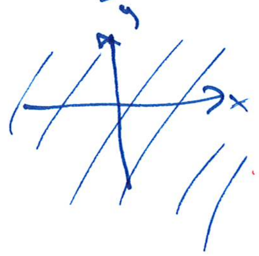


$x+y=0$

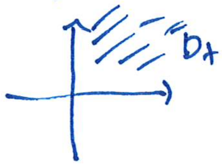
$y=-x$

Eks: $f(x,y) = 2x+3y-1$ D_f: alle tallpar (x,y)

$D_f = \mathbb{R}^2$



Eks: $f(x,y) = 1200\, x^{-1.2} y^{3.4}$ $D_f: x>0,\ y>0$



Verdimengden V_f = mengden av alle funksjonsverdier $z=f(x,y)$ vi kan få ved å velge alle tallpar (x,y) i D_f.

Eks: $f(x,y) = x^2+y^2+1$ $\qquad z=f(x,y)=x^2+y^2+1 \geq 1$

$V_f = [1,\rightarrow)$ $\quad \longleftrightarrow \quad$ minimum for f: 1
maksimum —"— : ∞

Vanskelig å finne ~~definisjonsm~~ **verdimengden**: Må finne maks/min.

② **Grafen til f:** **Som mengde** er **grafen** til f lik mengden av pkt (x,y,z) slik at $z=f(x,y)$ og (x,y) er med i D_f.

Grafisk kan den framstilles i et tre-dim. koordinatsystem (xyz-koord.sys)

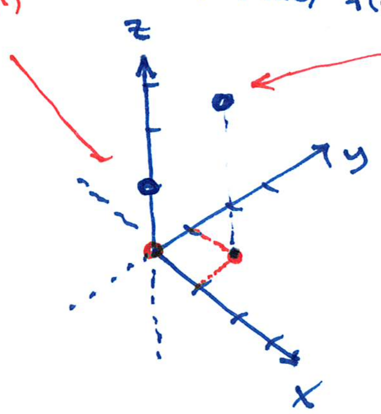
Eks: $f(x,y) = x^2+y^2+1$

(x,y)	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	--
z	$1 = f(0,0)$	$2 = f(1,0)$	$2 = f(0,1)$	$3 = f(1,1)$	

$\leftarrow$ alle (x,y) i $D_f = \mathbb{R}^2$

$\leftarrow$ $z=f(x,y)$

$(0,0,1)$ $\qquad (1,1,3)$

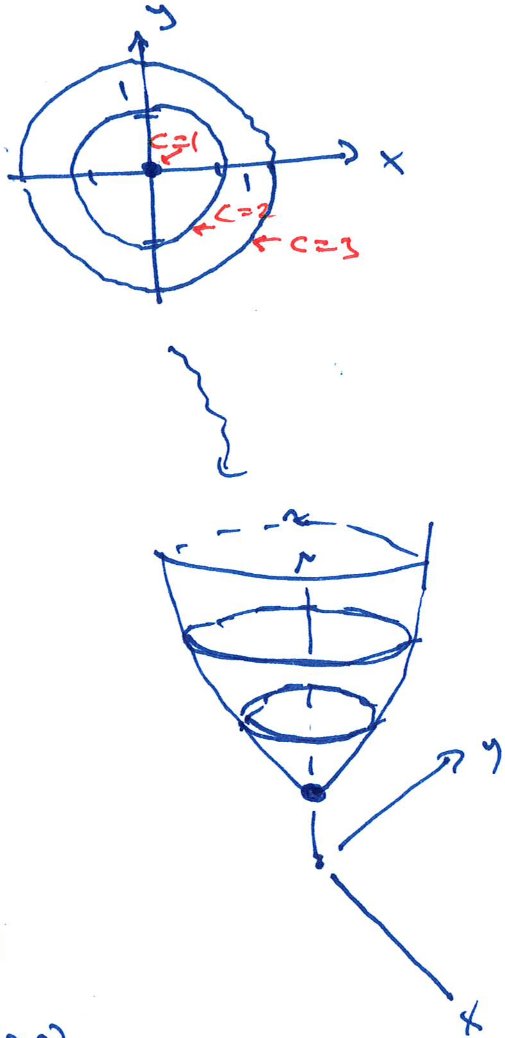


Nivåkurver: $\boxed{f(x,y) = c}$

Horisontalt kutt: $z = c$

Eks: $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$

c=2: (høyde 2)
$f(x,y) = 2$
$x^2 + y^2 + 1 = 2$
$x^2 + y^2 = 1$
sirkel, $r = 1$, sentrum i $(0,0)$



c=3: $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 = 3$
$x^2 + y^2 = 2$
Sirkel, $r = \sqrt{2}$

z=c:
$f(x,y) = c$
$x^2 + y^2 + 1 = c$
$x^2 + y^2 = c - 1$

$c > 1$: Sirkel m/ $r = \sqrt{c-1}$, senter i $(0,0)$

$c = 1$: $x^2 + y^2 = 0 \rightarrow$ et pkt $(0,0)$

$c < 1$: $x^2 + y^2 < 0 \rightarrow$ ingen pkt.

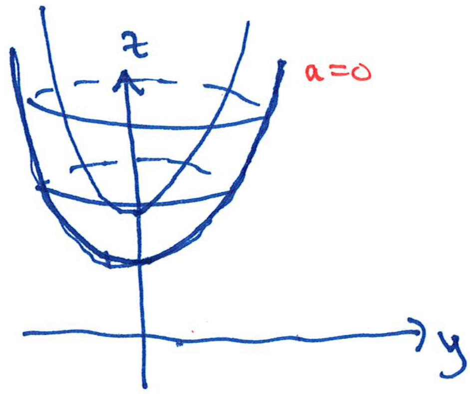
$f_{min} = 1$ i $(0,0)$

minimums-verdi (z)

min.-pkt (x,y)

Vertikale kutt: $x=a$ eller $y=b$

Eks: $f(x,y)=x^2+y^2+1$



$x=a$: $f(x,y)=a^2+y^2+1$

$z=y^2+a^2+1$

$a=0$: $z=y^2+1$

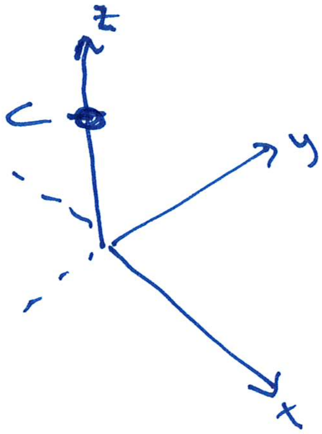
$a=1$: $z=y^2+2$

(3) Lineære funksjoner

Defn. En funksjon $f(x,y)$ er lineær hvis
$f(x,y) = \underline{ax+by+c}$ for tall a,b,c.

$y = f(x) = ax+b$
rett linje,
a = stign.tall
b = skj. m/ y-aksen

Eks: $f(x,y) = 3x - 6y + \underline{\underline{12}}$
$f(0,0) = 12$
Skjæring med z-aksen: $z = \underline{12}$



f er en lineær funksjon
$\Updownarrow$
grafen til f er et plan

Normalvektoren til planet $z = ax+by+c$ er
vektoren

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eks: $f(x,y) = 2x - 3y$

$z = 2x - 3y$
$0 = 2x - 3y - z \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\underline{n}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\Updownarrow$
$\underline{n}$ står normalt på grafen til f.

Oppsummering: Lineære funksjoner

① Grafen til $z = f(x,y)$ er et plan $\Longleftrightarrow$ $f(x,y) = ax + by + c$ er lineær

② I så fall: $c = f(0,0)$ er skjæring med z-aksen

(a,b) bestemmer normalvektoren $\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ som står normalt (ortogonalt, vinkelrett) på planet

Eks: $f = (x,y) = 2x - 3y + 1$

Graf: plan som skjærer z-aksen i $z = 1$ og som har normalvektor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$