	Plan
1	Partiellderivasjon og stasjonære punkter
2	Hesse-matrisen og andrederivert-testen

① Partiellderivasjon og stasjonære punkter

Defn: $f(x,y)$ funksjon i to variabler

$$f'_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$ ← f'_x: holder y konstant

$$f'_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$ ← f'_y: holder ~~x~~ konstant

Utregning av partiell deriverte:

Eks: $f(x,y) = 3x + 4y - 2$

$f'_x = 3$

$f'_y = 4$

Eks: $f(x,y) = x^2 - 6xy + 3y^2$

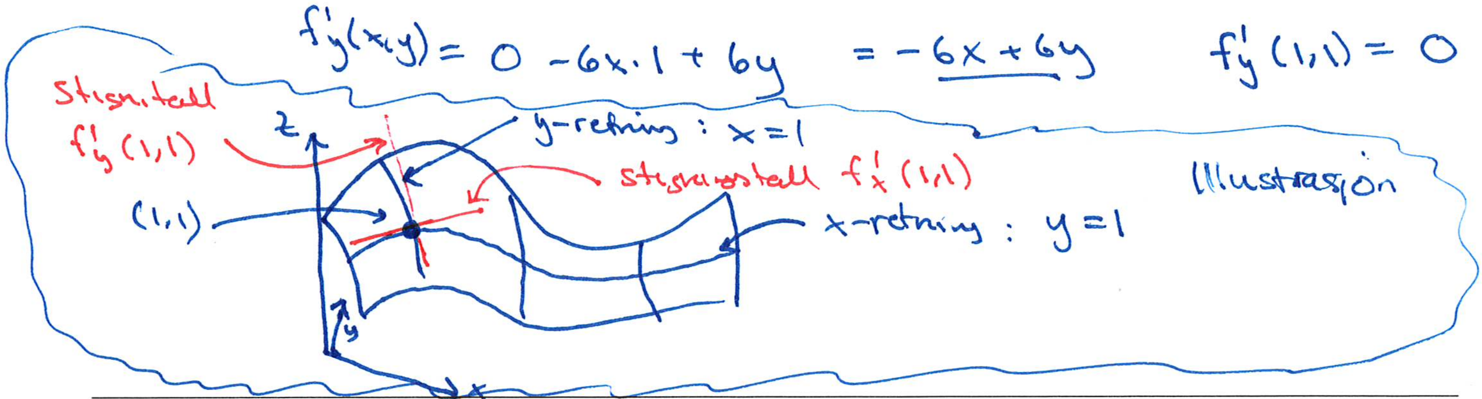
$f'_x(x,y) = 2x - 6 \cdot y \cdot 1 + 0 = \underline{2x - 6y}$

$f'_y(x,y) = 0 - 6x \cdot 1 + 6y = \underline{-6x + 6y}$

Punktet $(1,1)$:

$f'_x(1,1) = -4$

$f'_y(1,1) = 0$



Defn: Et <u>stasjonært punkt</u> for $f(x,y)$ er et punkt der $\boxed{f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0}$ **FOC** 2 likn. 2 ukjente

Eks: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

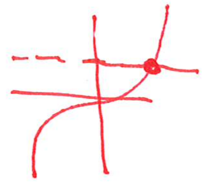
$f'_x = 3x^2 - 3y = 0$ ← Førsteordens-betingelser (FOC)

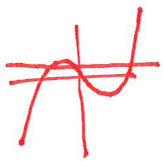
$f'_y = -3x + 3y^2 = 0$

$$3x^2 - 3y = 0 \mid :3$$
$$-3x + 3y^2 = 0 \mid :3$$

$$x^2 - y = 0 \Rightarrow y = x^2$$
$$-x + y^2 = 0$$

$$-x + (x^2)^2 = 0$$
$$-x + x^4 = 0$$
$$-x(1 - x^3) = 0$$





$\underline{x=0}$ eller $x^3 = 1$

$\underline{y=0}$ | $x = \sqrt[3]{1} = \underline{1}$, $y = \underline{1}$

Konklusjon: f har to stasjonære pkt

$(x,y) = \underline{(0,0)}$, $(x,y) = \underline{(1,1)}$

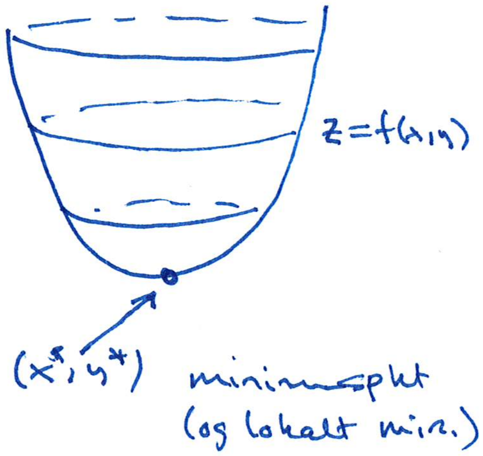
$f(0,0) = 0$ kandidat for maks?

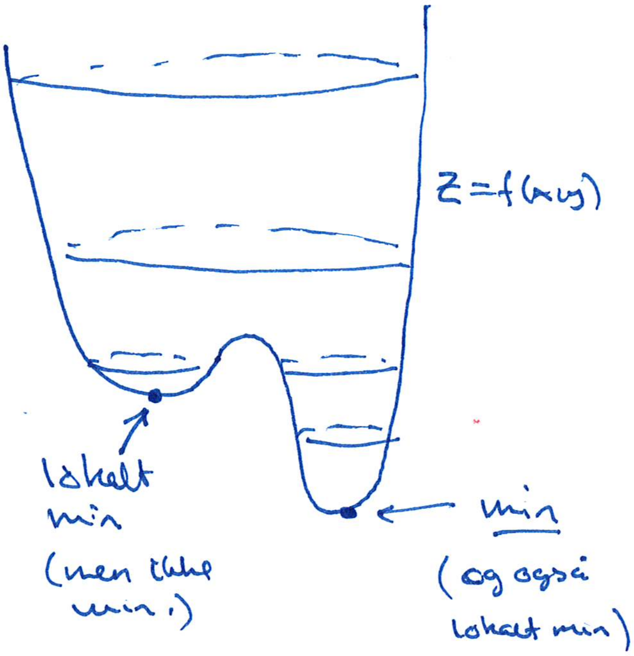
$f(1,1) = -1$ kandidat for min?

Defn. Et pkt. (x^*,y^*) er <u>lokalt minimum</u> for f hvis $f(x^*,y^*) \le f(x,y)$ for alle pkt (x,y) i nærheten av (x^*,y^*)

Et pkt (x^*,y^*) er <u>lokalt maks.</u> for f hvis $f(x^*,y^*) \ge f(x,y)$ for alle pkt (x,y) i nærheten av (x^*,y^*)

Defn: Et <u>minimumspunkt</u> (globalt minimumspunkt) for f er et pkt (x^*, y^*) slik at $f(x^*, y^*) \leq f(x,y)$ for alle pkt (x,y) i D_f. Punktet (x^*, y^*) er et <u>lokalt minimumspunkt</u> for f hvis $f(x^*, y^*) \leq f(x,y)$ for alle pkt (x,y) i nærheten av (x^*, y^*).





Et <u>maksimumspunkt</u> (globalt maksimumspunkt) for f er et pkt (x^*, y^*) slik at $f(x^*, y^*) \geq f(x,y)$ for alle pkt (x,y) i D_f. Punktet (x^*, y^*) er <u>lokalt maksimum</u> for f hvis $f(x^*, y^*) \geq f(x,y)$ for alle (x,y) i nærheten av (x^*, y^*).

<u>Maks/min-verdi</u> $= f(x^*, y^*)$

(2) Hesse-matrisen og andre derivert-testen

Eks: $f = x^3 - 3xy + y^3$

$f'_x = 3x^2 - 3y = 0$
$f'_y = -3x + 3y^2 = 0$ $\Rightarrow$ Stasjonære pkt: $(x,y) = (0,0), (1,1)$

$f''_{xx} = 6x$ $\quad f''_{xy} = -3$

$f''_{yx} = -3$ $\quad f''_{yy} = 6y$

$$\underbrace{H(f)(x,y)}_{\text{Hesse-matrise til } f \text{ i pkt. } (x,y)} = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

I det generelle tilfellet: $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$

Hesse-matrisen til f i punktet (x,y).

Merk: Hessematrisen er en 2×2-matrise som er symmetrisk

Forklaring: $f''_{xy} = f''_{yx}$ (for alle "vanlige" funksjoner).

Andre-derivert testen

Vi ser på et stasjonært pkt (x^*, y^*) for f, og Hessematrisen $H(f)(x^*, y^*)$

$$H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x^*,y^*) & f''_{xy}(x^*,y^*) \\ f''_{yx}(x^*,y^*) & f''_{yy}(x^*,y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Da har vi:

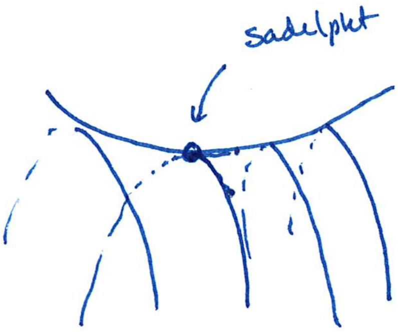
i) Hvis $\underbrace{\det H(f)(x^*,y^*)}_{AC-B^2} > 0$ og $\underbrace{\operatorname{tr} H(f)(x^*,y^*)}_{A+C} > 0$,
så er (x^*, y^*) lokalt min.

ii) Hvis $\underbrace{\det H(f)(x^*,y^*)}_{AC-B^2} > 0$ og $\underbrace{\operatorname{tr} H(f)(x^*,y^*)}_{A+C} < 0$,
så er (x^*, y^*) lokalt maks

iii) Hvis $\underbrace{\det H(f)(x^*,y^*)}_{AC-B^2} < 0$, så er (x^*, y^*) et sadelpunkt

Hvis $\det H(f)(x^*,y^*) = 0$, så har testen ingen konklusjon.

Defn: Et stasjonært pkt som hverken er lokalt maks eller lokalt min kalles et sadelpkt



Eks: $f = x^3 - 3xy + y^3$

Stasjonære pkt: $\underline{(0,0)}$, $\underline{(1,1)}$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$\underline{(0,0)}$: $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

$\det = 0 - 9 = -9 < 0$

$\det = AC - B^2$

$\Downarrow$

(0,0) er et <u>Sadelpkt</u>

$\underline{(1,1)}$: $H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$\det = 36 - 9 = 27 > 0$

$tr = 6 + 6 = 12 > 0$

$\Downarrow$

<u>(1,1) er lokalt min</u>

<u>Foreløpig konkl:</u> f har ingen maks / lokale maks

f har <u>lokalt min</u> $f(1,1) = \underline{-1}$ → må undersøke om det er <u>globalt min</u>.