Plan
1 Randpunkt som maksimums- eller minimumspunkt
2 Ekstremverdisetningen

Veiledning:
D3-080
D3-037
(D3-019)

① Randpunkt som maks/min

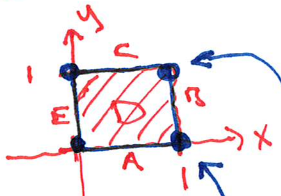
Optimering uten bibetingelser: max/min $f(x,y)$

Optimering med bibetingelser: max/min $f(x,y)$ når (x,y) er med i delmengden D

Eks: max $\underbrace{f(x,y) = x+y}_{\text{objektivfn.}}$ når $\underbrace{0 \le x \le 1 \text{ og } 0 \le y \le 1}_{\text{bibetingelser}}$

$f'_x = 1 = 0$
$f'_y = 1 = 0$
ingen stasj. pkt.

D: $0 \le x, y \le 1$



Randpkt: A, B, C, E = fire sidekanter

Randen til D: de fire sidene i firkanten

A: $y=0$, $0 \le x \le 1$ $f(x,y) = f(x,0) = x$ max på A: $f(1,0) = 1$

B: $x=1$, $0 \le y \le 1$ $f(x,y) = f(1,y) = 1+y$ max på B: $f(1,1) = 2$

C: $y=1$, $0 \le x \le 1$ $f(x,y) = f(x,1) = x+1$ max på C: $f(1,1) = 2$

E: $x=0$, $0 \le y \le 1$ $f(x,y) = f(0,y) = y$ max på E: $f(0,1) = 1$

Størst verdi på randen: $f(1,1) = 2$

Ser at $f(1,1) = 2$ er maks-verdien til f på D.

Eks: i) max/min $f(x,y) = xy - 3x + 2y$ når $0 \le x,y \le 2$

ii) max/min $f(x,y) = xy$ når $x^2 + 4y^2 = 36$

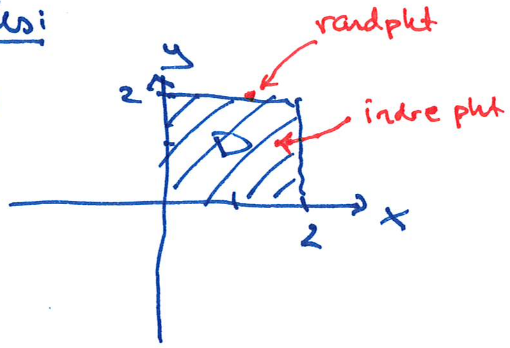
iii) max/min $f(x,y) = xy$ når $x^2 + 4y^2 \le 36$

<u>Objektivfunksjon</u>: Den funksjonen $f(x,y)$ som vi ønsker å maksimere/minimere

<u>Mengden av tillatte pkt</u>: (delmengde av $\mathbb{R}^2$) Mengden D av alle pkt som er tillatte, dvs. oppfyller alle bibetingelsene.

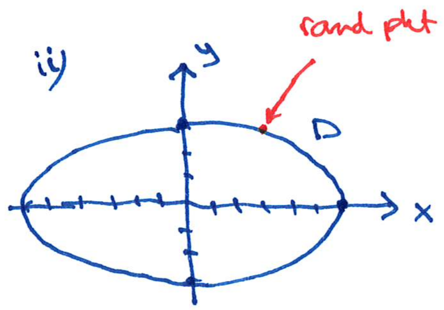
Eks:

i)



D: $0 \le x,y \le 2$

ii)



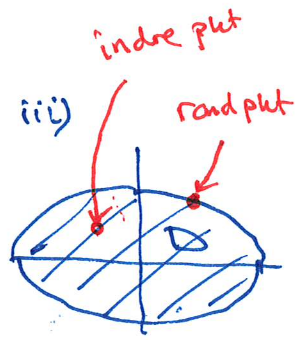
D: $x^2 + 4y^2 = 36 \quad |:36$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{\cancel{4}y^2}{\cancel{36}\,9} = 1$$

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

ellipse, sentr $(0,0)$, halvakser $a = 6$, $b = 3$

iii)



D: $x^2 + 4y^2 \le 36$

$=$ gir randpkt

$\left.\begin{matrix} < \\ > \end{matrix}\right\}$ gir indre pkt

<u>Defn:</u> Et pkt (x,y) er <u>randpkt for D</u> hvis det finnes pkt i nærheten av (x,y) som er med i D og som er utenfor D. Et pkt (x,y) i D som ikke er randpkt er et <u>indre pkt</u> i D.

Et <u>kandidatpkt</u> for et optimeringsproblem med bibetingelser, der $f(x,y)$ er objektivfunksjonen og D er mengden av tillatte punkter er

i) Stasjonære pkt for f i det indre av D

ii) Punkter der f'_x eller f'_y ikke finnes i det indre av D

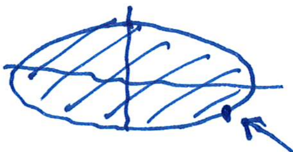
iii) Randpkt for D

2. <u>Ekstremverdisetningen</u>

> Hvis f er en <u>kontinuerlig</u> funksjon og mengden D er <u>lukket</u> og <u>begrenset</u>, så har f en maks/min-verdi i D.

<u>Defn:</u> Mengden D er <u>lukket</u> hvis alle randpkt i D er med i D.

<u>Eks:</u> $D: x^2+4y^2 \leq 36$

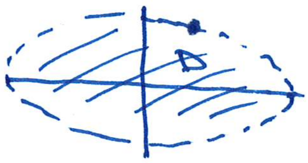


<u>Randpkt:</u>

$x^2+4y^2=36$

<u>Lukket</u> siden $x^2+4y^2=36$ er tillatt

$D: x^2+4y^2 < 36$



<u>Randpkt:</u>

$x^2+4y^2=36$

<u>Ikke lukket</u> siden $x^2+4y^2=36$ ikke er tillatt

<u>Merk:</u>

$= \;\leq\; \geq$ <u>lukket</u>

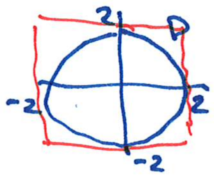
$< \;>$ <u>ikke lukket</u>

Defn. Mengden D er <u>begrenset</u> hvis det finnes et rektangel (med endelige sider) som inneholder alle pkt. i D. Med andre ord, D er begrenset hvis det fins tall a, b, c, d slik at

$$a \leq x \leq b$$
$$c \leq y \leq d$$

for alle pkt (x, y) i D.

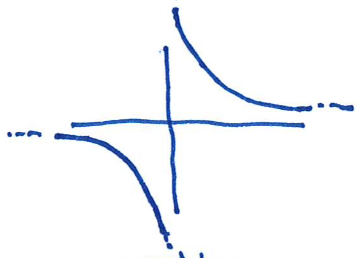
Eks: D: $x^2+y^2=4$



$-2 \leq x \leq 2$
$-2 \leq y \leq 2$

D er begrenset

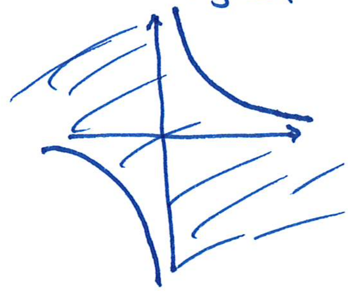
D: $xy=1$



$y = 1/x$

D er <u>ikke</u> begrenset

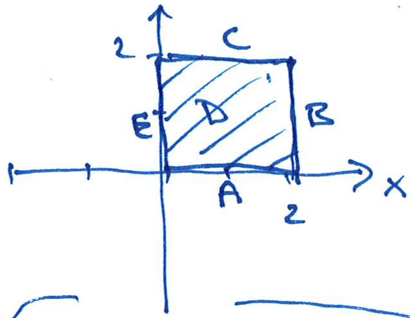
D: $xy \leq 1$



D er <u>ikke</u> begrenset

Defn. D kalles <u>kompakt</u> hvis den er <u>lukket</u> og <u>begrenset</u>

<u>Eks:</u> max $f(x,y) = xy - 3x + 2y$ når $0 \le x,y \le 2$



<u>Kandidat pkt:</u>

i) <u>Stasjonære pkt</u>: nei

$f'_x = y - 3 = 0$ $\quad y = 3$

$f'_y = x + 2 = 0$ $\quad x = -2$

$\Rightarrow (x,y) = (-2,3)$ er eneste stasj. pkt, og det er <u>ikke</u> et indre pkt for D.

D er lukket og begrenset

$\Downarrow$ ekstremverdisetn.

det fins et maks

ii) Andre kritiske pkt: nei

iii) <u>Randpkt for D:</u>

A: $y=0,\ 0 \le x \le 2$ $\quad f(x,0) = -3x$

$f'(x,0) = -3$ avtagende

$\quad \| $

$(-3x)'$

<u>Maks på A:</u> $f(0,0) = \underline{0}$

B: $x=2,\ 0 \le y \le 2$ $\quad f(2,y) = 2y - 6 + 2y$

$= 4y - 6$

$(4y-6)' = 4$ voksende

<u>Maks på B:</u> $f(2,2) = \underline{2}$

C: $y=2,\ 0 \le x \le 2$ $\quad f(x,2) = 2x - 3x + 4$

$= -x + 4$

$(-x+4)' = -1$ avtagende

<u>Maks på C:</u> $f(0,2) = \underline{4}$

E: $x=0,\ 0 \le y \le 2$ $\quad f(0,y) = 2y$

$(2y)' = 2$ voksende

<u>Maks på E:</u> $f(0,2) = \underline{4}$

<u>Beste kandidat pkt:</u> $f(0,2) = 4$ (størst verdi blant kand. pkt)

$\Rightarrow f_{max} = \underline{\underline{4}}$ i pkt $(x,y) = \underline{\underline{(0,2)}}$