Plan

Lagrange-problem: $\boxed{\text{max/min } f(x,y) \text{ når } g(x,y)=a}$ (*)

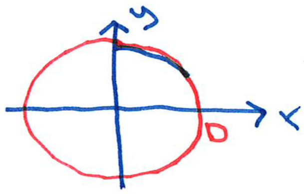
(bibetingelsene er likninger)

(i) D: $g(x,y)=a$ mengden av tillatte pkt

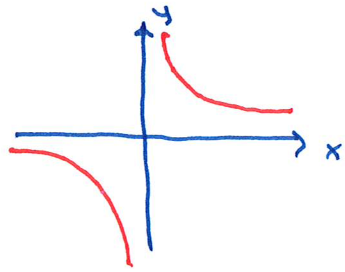
- lukket ✓
- kun randpkt (ingen indre pkt)

D begrenset ⇓ max/min fins pg. ekstremverdisetningen (D kompakt)

D ikke begrenset: problemet kan ha max/min men det er ikke sikkert



Eks: D: $x^2+y^2=4$



Eks: D: $xy=1$

(ii) Kandidatpkt: Lagranges multiplikatormetode

$$L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda\cdot(g(x,y)-a)$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} L'_x=0 \\ L'_y=0 \end{array}\right\} \text{FOC} \qquad g(x,y)=a \,\}\, C}$$ ← Lagrange-betingelsene

② Nødvendig betingelse for max/min

Resultat:

Hvis (x^*, y^*) er max/min i Lagrangeproblemet $(*)$, så har vi enten

i) Det fins en λ^* slik at $(x^*, y^*; \lambda^*)$ tilfredsstiller Lagrange-betingelsene (FOC+C)

ii) Unntakspkt: Bibetingelsen er degenerert i (x^*, y^*)

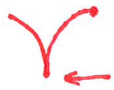
I praksis:

* Ordinære kandidatpkt: Løs $\left\{ \begin{array}{l} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ g(x,y) = a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \} \text{ FOC} \\ \} \text{ C} \end{array}$
* Unntakspkt:

$$\left\{ \begin{array}{l} g'_x = 0 \\ g'_y = 0 \\ g(x,y) = a \end{array} \right\} \text{ degenerert bibetingelse} \iff$$

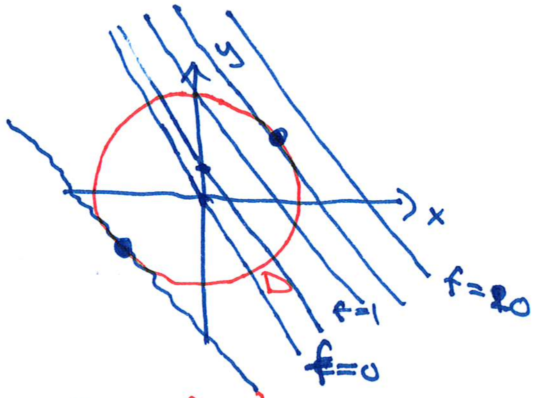
D: $g(x,y) = a$ har ikke entydig tangent i (x,y)

Eks:  ← degenerert bibetingelse

 ← degenerert bibetingelse

① Forklaring av Lagranges multiplikatormetode

Eks: max/min $f(x,y) = 3x+y$ når $x^2+y^2=10$



Nivåkurver for f: $f(x,y)=c$

$3x+y=c$

$\boxed{y=-3x+c}$

rett linje, stign.tall -3

skj. med y-aksen: c

$D:\ x^2+y^2=10$

sirkel, $r=\sqrt{10}$, senter i $(0,0)$

Ordinære kandidatpkt = skjæringspkt mellom nivåkurven $f(x,y)=c$ og bibetingelsen $g(x,y)=a$ som er tangentielle, dvs tangenten til $f(x,y)=c$ og $g(x,y)=a$ er like.

$$\boxed{-\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{g'_x}{g'_y}}$$

$$\Updownarrow$$

$$L'_x=0,\quad L'_y=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$$

$$\begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} g'_x \\ g'_y \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

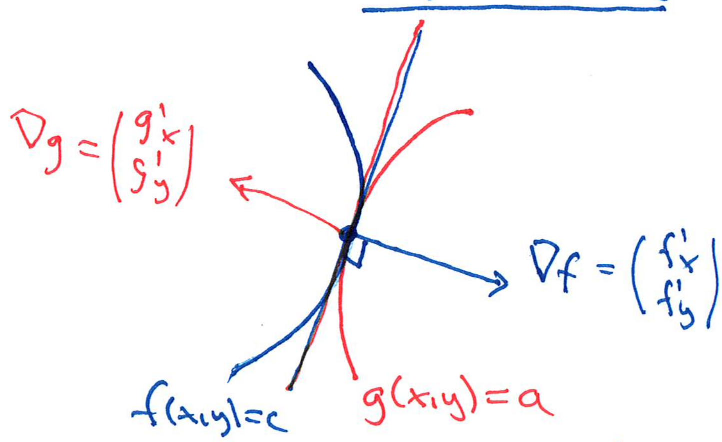
$$f'_x = \lambda \cdot g'_x$$

$$f'_y = \lambda \cdot g'_y$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{aligned} L'_x &= f'_x - \lambda g'_x = 0 \\ L'_y &= f'_y - \lambda g'_y = 0 \end{aligned}\right\} \text{FOC}$$

tangentene er like



Vi ser etter pkt der $f(x,y)=c$ og $g(x,y)=a$ skjærer hverandre tangentielt.

③ Oppgaveark 45

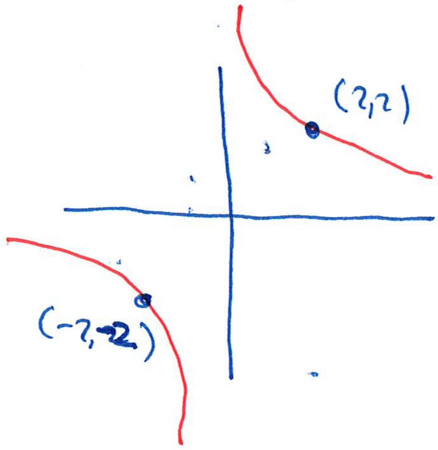
1f) $\max f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 16$ når $xy = 4$

$= (xy)^2 - x^2 - y^2 + 16$

$= \max 32 - x^2 - y^2$ når $xy = 4$

$$L = 32 - x^2 - y^2 - \lambda(xy - 4)$$

$$\boxed{\begin{aligned} L'_x &= -2x - \lambda y = 0 \\ L'_y &= -2y - \lambda x = 0 \\ xy &= 4 \end{aligned}}$$



D: $xy = 4 \iff y = 4/x$ ikke begrenset

① $-2x = \lambda y \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\lambda y$

② $-2y - \lambda\left(-\frac{1}{2}\lambda y\right) = 0 \quad |\cdot 2$

$-4y + \lambda^2 y = 0$

$y(\lambda^2 - 4) = 0$

$y(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$

$\cancel{y = 0}$ eller $\lambda = 2$ eller $\lambda = -2$

$y = 0$: ③ $\cancel{x \cdot 0 = 4}$

ingen kand. pkt.

$\lambda = 2$: $\cancel{x = -y}$, ③ $\cancel{(-y)y = 4}$, $\cancel{y^2 = -4}$

Ingen kand. pkt

$\lambda = -2$: $x = y$

③ $y \cdot y = 4$

$y^2 = 4$

$y = \pm 2$

$\underline{(2,2;-2)}$, $\underline{(-2,-2;-2)}$

Husk: Hvis vi bruker bibetingelsen til å endre $f(x,y)$, vil det også endre λ.

3 max $U(x,y) = 0.3\ln(x-3) + 0.7\ln(y-2)$

når $12x + 5y = 60$

$$L = 0.3\ln(x-3) + 0.7\ln(y-2) - \lambda(12x+5y-60)$$

$$L'_x = 0.3 \cdot \frac{1}{x-3}\cdot 1 - \lambda \cdot 12 =$$

$$L'_y = 0.7 \cdot \frac{1}{y-2}\cdot 1 - \lambda \cdot 5 =$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{0.3}{x-3} - 12\lambda &= 0 \\ \frac{0.7}{y-2} - 5\lambda &= 0 \\ 12x + 5y &= 60 \end{aligned}}$$

(1) $12\lambda = \dfrac{0.3}{x-3} \quad \Big| \cdot 5$

$60\lambda = \dfrac{1.5}{x-3}$

(2) $5\lambda = \dfrac{0.7}{y-2} \quad \Big| \cdot 12$

$60\lambda = \dfrac{8.4}{y-2}$

$$\frac{1.5}{x-3} = \frac{8.4}{y-2} \quad \Big| \cdot (x-3)(y-2)$$

$$1.5(y-2) = 8.4(x-3) \quad \Big| \cdot 10$$

$$15y - 30 = 84x - 252$$

$$222 = 84x - 15y$$

(3) $12x + 5y = 60$

(1)+(2) $84x - 15y = 222$ $\quad \Big] \cdot (-7) \rightarrow$

$$12x + 5y = 60$$

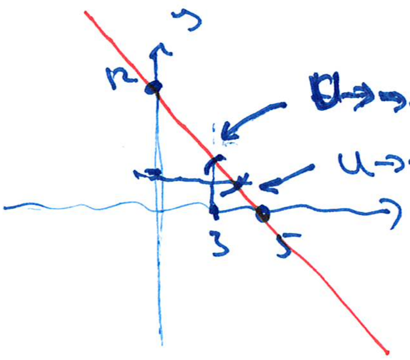
$$-50y = -198$$

$$y = \frac{-198}{-50} = 3.96$$

$$12x = 60 - 5 \cdot 3.96$$

$$x = \frac{60 - 19.8}{12}$$

$$x = \frac{40.2}{12} = \frac{201}{60} = \frac{67}{20}$$



D: $12x + 5y = 60$

$x > 3,\ y > 2$

max

$$(x,y) = \left(\frac{67}{20}, \frac{99}{25}\right)$$

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/

Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Bruk Lagranges metode til å finne kandidater for maksimum og/eller minimum:

a) $\max / \min f(x,y) = 3x - y$ når $x^2 + 4y^2 = 37$
b) $\max / \min f(x,y) = x^2 + 4y^2$ når $3x - y = 37$
c) $\max / \min f(x,y) = xy$ når $x^2 + 4y^2 = 8$
d) $\max / \min f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ når $xy = 6$
e) $\max f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 16$ når $x^2 + y^2 = 16$
f) $\max f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 16$ når $xy = 4$

Oppgave 2.
Finn maksimum/minimum, hvis det eksisterer:

a) $\max / \min f(x,y) = 3x - y$ når $x^2 + 4y^2 = 37$
b) $\max / \min f(x,y) = x^2 + 4y^2$ når $3x - y = 37$
c) $\max / \min f(x,y) = xy$ når $x^2 + 4y^2 = 8$
d) $\max / \min f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ når $xy = 6$
e) $\max f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 16$ når $x^2 + y^2 = 16$
f) $\max f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 16$ når $xy = 4$

Oppgave 3.
Løs Lagrange-problemet: $\max U(x,y) = 0.3\ln(x-3) + 0.7\ln(y-2)$ når $12x + 5y = 60$.

Oppgave 4.
Eksamen MET1180 (Desember 2015) Oppgave 5
Vi betrakter nivåkurven $g(x,y) = 0$, hvor g er funksjonen $g(x,y) = x^3 + xy + y^2$.

a) Finn alle punkt på nivåkurven med $x = -2$, og bestem tangenten i hvert av disse punktene.
b) Finn maksimumsverdien til $f(x,y) = x$ under bibetingelsen $x^3 + xy + y^2 = 0$.

Oppgave 5.
Eksamen MET1180 (Juni 2016) Oppgave 5
Vi betrakter Lagrange-problemet

$$\max / \min f(x,y) = x + 2y - \sqrt{36 - x^2 - 4y^2} \quad \text{når} \quad x^2 + 4y^2 = 36$$

a) Finn punktene på nivåkurven $x^2 + 4y^2 = 36$ der tangenten har stigningstall $y' = 1/2$.
b) Tegn en skisse av $D = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 = 36\}$. Er D begrenset? Hva slags kurve er dette?
c) Løs Lagrange-problemet og finn maksimums- og minimumsverdien.
d) Løs det nye optimeringsproblemet vi får når vi endrer bibetingelsen til $x^2 + 4y^2 \leq 36$.

Oppgave 6. *Vanskelig!*
Løs Lagrangeproblemet $\max f(x,y) = x+y$ når $x^3 - 3xy + y^3 = 0$. Du kan gå ut i fra at problemet har et maksimum.