MET 1180, 5. forelesning, 8. sept. 2022, Runar Ile

Plan: 1. Regulære kontantstrømmer
2. Uendelige geom. rekker og grenseverdier
3. Eulers tall og kontinuerlig forrentning

1. Regulære kontantstrømmer

Et fast beløp betales hver termin.

Eks Annuitetslån (nåverdien av kontantstrømmen = lånebeløpet)

Eks Sparing med et fast beløp hver termin.

– begge gir geometriske rekker

Eks (Fagoppg. 2019h, oppg. 6a)

Kåre vurderer et boliglån med

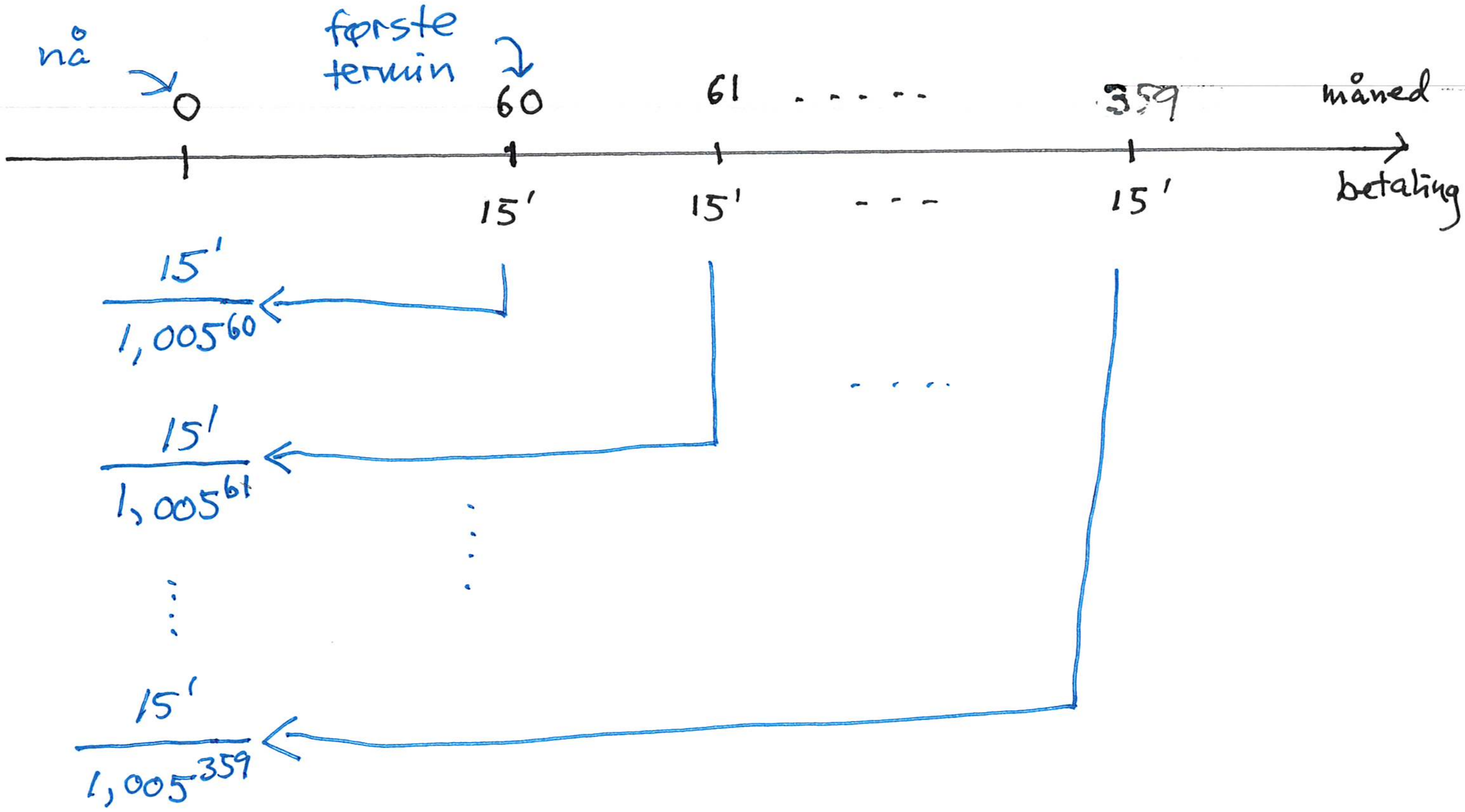
- månedlige terminer over 25 år
- han regner med å kunne betale 15000 /mnd
- første termin er om 5 år
- Nominell rente er 6% med månedlig forrentning

– Finn den geometriske rekken som gir nåverdien til kontantstrømmen

– Beregn hvor mye Kåre kan låne

Løsning Månedsrente $\frac{6\%}{12} = 0{,}5\%$

Antall terminer $12 \cdot 25 = 300$



Summen (nåverdien) er en geom. rekke med

$$a_1 = \frac{15'}{1,005^{359}}, \quad k = 1,005, \quad n = 300$$

$$\text{Nåverdi} = \text{lånebeløp} : \frac{15'}{1,005^{359}} \cdot \frac{1,005^{300} - 1}{0,005}$$

$$= \underline{\underline{1\,734\,620,76}}$$

2. Vendelige geom. rekker og grenseverdier

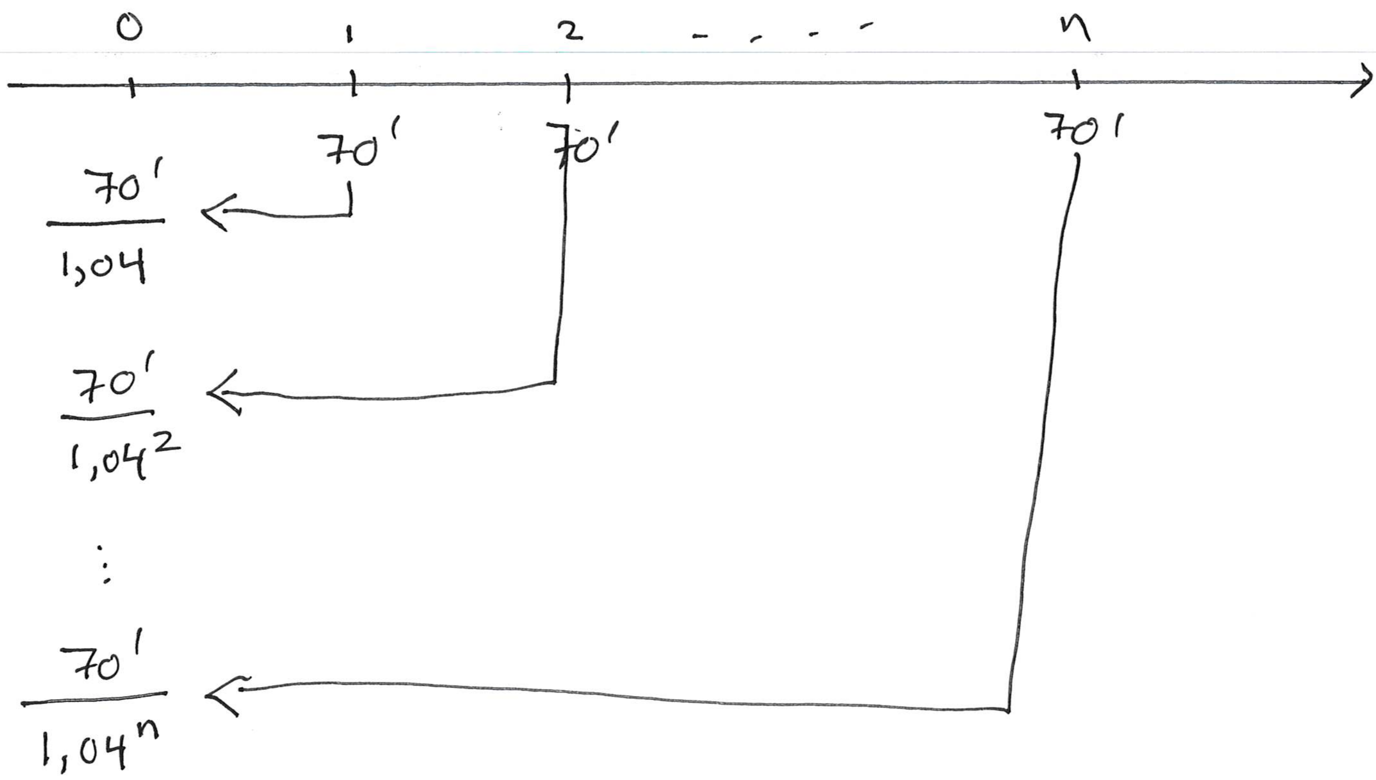
Eks Annuitet : 70'

rente : 4 %

Ant. terminer : n (år)

Første betaling : 1 år fra nå

Lånebeløpet (nåverdien) blir da :



Formelen for en geom. rekke gir

$$\frac{70'}{1,04^n} \cdot \frac{1,04^n - 1}{0,04} = \frac{70' \cdot (1,04^n - 1)}{1,04^n \cdot 0,04}$$

$$= \frac{70' \cdot (1,04^n - 1) : 1,04^n}{\cancel{1,04^n} \cdot 0,04 : \cancel{1,04^n}} = \frac{70' \cdot \left(1 - \frac{1}{1,04^n}\right)}{0,04}$$

nærmer seg 0 når n blir større og større ($n \to \infty$)

Så hele brøken (nåverdien) nærmer seg

$$\frac{70'}{0,04} = \underline{\underline{1750'}}$$

Konklusjon: Hvis du betaler banken 70 000 hvert år i all fremtid, kan banken låne deg 1,75 mill til 4% rente

Start: 9.00

3. Eulers tall og kontinuerlig forrentning

Eks Du setter inn 1000 på en konto med 12 % nominell rente. Pengene står i ett år.

Forrentning	Balanse etter ett år
Årlig	$1000 \cdot 1{,}12 = 1120{,}00$
Halvårlig	$1000 \cdot 1{,}06^2 = 1123{,}60$
Kvartalsvis	$1000 \cdot 1{,}03^4 = 1125{,}51$
Månedlig	$1000 \cdot 1{,}01^{12} = 1126{,}83$
Daglig	$1000 \cdot \left(1 + \frac{12\%}{365}\right)^{365} = 1127{,}47$

Mønster: Med n terminer får vi $1000 \cdot \left(1 + \frac{12\%}{n}\right)^n$

Eulers tall: $e = 2{,}718281\ldots\ldots$

1 $\boxed{e^x}$

Beregner $1000 \cdot e^{0{,}12} = 1127{,}50$

1000 $\boxed{\times}$ 0,12 $\boxed{e^x}$ $\boxed{=}$

Eulers tall er definert som grenseverdien til $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ når n blir større og større

Skriver $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e$

Etter 1 år med 12 % nominell rente og ~~kontinuerlig forrentning~~ har innskuddet på 1000 vokst til

$$1000 \cdot e^{0,12} = 1127,50$$

den årlige vekstfaktoren med kontinuerlig forrentning med 12 % nominell rente

---

Eks $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,71692\ldots$

$$\left(1 + \frac{1}{1\,\text{mill}}\right)^{1\,\text{mill}} = 2,71828\ldots$$

Tilbake til eksempelet med 12 % :

$$\left(1 + \frac{0,12}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n}{0,12}\right)}\right)^n$$

$$= \Bigg[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n}{0,12}\right)}\right)^{\frac{n}{0,12}}}_{\text{nærmer seg } e \text{ når } n \to \infty}\Bigg]^{0,12} \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{0,12}$$

Så $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 1000 \cdot e^{0,12}$

$$= 1127,50\ldots$$

Den effektive renten er

$$e^{0,12} - 1 = 12,7497 \%$$

Oppg. Du setter inn 10 mill. på en konto med 2,8% (nominell) rente. Beregn balansen etter 5 år.

a) Med årlig forrentning

b) Med kontinuerlig forrentning

c) Bestem den effektive renten med kontinuerlig forrentning.

Løsning

a) Vekstfaktor for ett år: 1,028

Balanse etter 5 år: $10 \text{ mill.} \cdot 1{,}028^5$

$= \underline{\underline{11{,}48 \text{ mill.}}}$

b) Vekstfaktor for ett år: $e^{0{,}028} = 1{,}0284$

Balanse etter 5 år: $10 \text{ mill} \cdot (e^{0{,}028})^5$

$= 10 \text{ mill.} \cdot e^{0{,}028 \cdot 5}$

$= 10 \text{ mill} \cdot e^{0{,}140}$

$= \underline{\underline{11{,}50 \text{ mill.}}}$

c) Effektiv rente er

$e^{0{,}028} - 1 = 1{,}0284 - 1 = \underline{\underline{2{,}84\%}}$