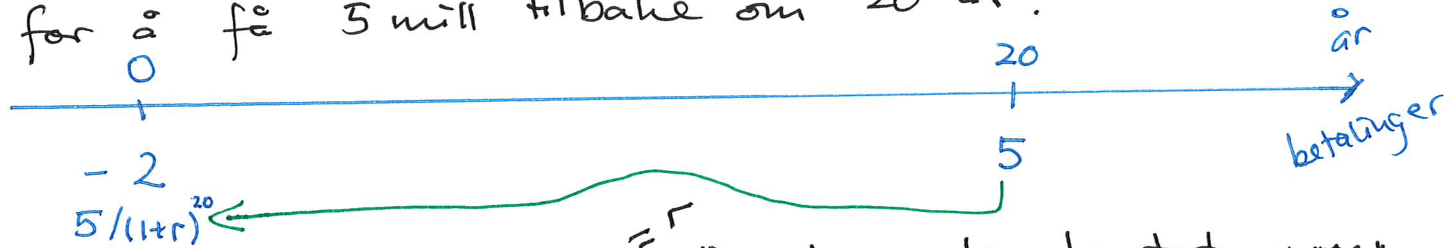
MET 1180, forelesning 6, 13. sept. 2022, Runar Ile

Plan:
1. Repetisjon
2. Lineære og kvadratiske likninger
3. Likninger med parametre: abc-formelen

1. Repetisjon

Oppg 5 (forrige uke) Du vurderer å investere 2 mill. nå for å få 5 mill tilbake om 20 år.



Vil finne internrenten $(=r)$ til denne kontantstrømmen. Da er r den renten som gjør at nåverdien blir 0.

a) årlig forrentning gir likningen

$$-2 + \frac{5}{(1+r)^{20}} = 0$$

dvs

$$\frac{5}{(1+r)^{20}} = 2 \qquad \mid \cdot (1+r)^{20}$$

$$5 = 2 \cdot (1+r)^{20} \qquad \mid : 2$$

$$(1+r)^{20} = \frac{5}{2}$$

$$1+r = \sqrt[20]{\frac{5}{2}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$$

så $r = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{20}} - 1 = \underline{\underline{4,69\,\%}}$

2,5 $\boxed{y^x}$ 20 $\boxed{1/x}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$

b) Med kvartalsvis forrentning vil den kvartalsvise internrenten gi likningen

$$\frac{5}{(1+r)^{80}} = 2 \quad (80 = 4 \cdot 20 \text{ renteperioder})$$

som gir $r = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{80}} - 1 = 1{,}152\%$

som gir nominell årlig internrente

$4 \cdot 1{,}152\% = \underline{\underline{4{,}61\%}}$

c) Med månedlig forrentning vil den månedlige internrenten gi likningen

$$\frac{5}{(1+r)^{240}} = 2 \quad \text{og vi får}$$

$$r = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{240}} - 1 = 0{,}3825\%$$

Den nominelle årlige internrenten er da $12 \cdot 0{,}3825\% = \underline{\underline{4{,}59\%}}$

d) Med kontinuerlig forrentning er den årlige vekstfaktoren e^r så nåverdien til kontantstrømmen blir

$$-2 + \frac{5}{(e^r)^{20}} \quad \text{som skal være } 0$$

Altså $\frac{5}{(e^r)^{20}} = 2 \quad \Big| \cdot \frac{(e^r)^{20}}{2}$

som gir $(e^r)^{20} = \frac{5}{2}$

så $e^r = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{20}} = 1,0469\ldots$

Vi kan prøve med ulike verdier for r

Et godt svar er $\underline{\underline{r = 4,58\,\%}}$

(eller $r = \frac{\ln 5 - \ln 2}{20}$)

<u>Oppg</u> Du setter 2 mill. inn på konto i dag, årlig (nominell) rente er 12 % med kontinuerlig forrentning. Bestem balansen etter 1 år og 7 måneder.

<u>Løsning</u> $2\text{ mill} \cdot \underbrace{e^{0,12}}_{\text{vekstfaktor for 1 år}} \cdot \underbrace{\left(e^{0,12}\right)^{\frac{7}{12}}}_{\text{vekstfaktor for 7 mnd.}}$

$= 2\text{ mill} \cdot e^{0,12 + 0,12 \cdot \frac{7}{12}} = 2\text{ mill} \cdot e^{0,12 \cdot (1 + \frac{7}{12})}$

$= 2\text{ mill} \cdot e^{\cancel{0,12} \cdot \frac{19}{\cancel{12}}} = 2\text{ mill} \cdot e^{0,19} = \underline{\underline{2,42\text{ mill}}}$

Etter 7 måneder: $2\text{ mill} \cdot \left(e^{0,12}\right)^{\frac{7}{12}}$

$= 2\text{ mill} \cdot e^{0,07} = \underline{\underline{2,15\text{ mill}}}$

Start : 15.02

2. Lineære og kvadratiske likninger

Et lineært uttrykk $ax + b$ (a og b er tall, $a \neq 0$)

Eks $4x - 3$ $(a = 4, b = -3)$

En lineær likning - En likning som kan gjøres om til: $\underbrace{ax + b = 0}$ $(a \neq 0)$

standardformen til en lineær likning

Eks Likningen $\frac{1}{x+3} = \frac{2}{x+4}$ $\Big| \cdot (x+3)(x+4)$

Multipliserer med fellesnevner på begge sider

gir $x + 4 = 2 \cdot (x+3)$

bruker distributiv lov på HS.

$$x + 4 = 2x + 6$$

trekker fra $2x+6$ fra BS.

$$-x - 2 = 0 \qquad (a = -1, \; b = -2)$$

$$(x \neq -3, \quad x \neq -4)$$

Et kvadratisk uttrykk: $ax^2 + bx + c$

a, b, c er tall, $a \neq 0$

Et kvadratisk likning En likning som kan gjøres om til en ekvivalent likning $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Eks Likningen $3x+9 = (x-1)(x+3)$

– løser opp parantesene

$$3x+9 = x^2+3x-x-3$$

– trekker fra $3x+9$ på BS.

$$0 = x^2-x-12 \quad (a=1, b=-1, c=-12)$$

Eks Likningen $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = 3 \quad | \cdot x(x+1)$

$$x+1+2x = 3x(x+1)$$

løser opp: $3x+1 = 3x^2+3x$

trekke sammen: $3x^2-1 = 0 \quad (a=3, b=0, c=-1)$

---

2. Likninger med parametre : abc-formelen

Hvis $a \neq 0$ gir abc-formelen løsningene på alle kvadratiske likninger på standard-formen $ax^2+bx+c=0$, nemlig

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Eks $3x^2+4x-5=0 \quad (a=3, b=4, c=-5)$

abc-formelen gir løsningene

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+60}}{6}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot 19}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{19}}{6}$$

$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \frac{\cancel{2}(-2 \pm \sqrt{19})}{\cancel{2} \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{-2 \pm \sqrt{19}}{3}}}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3}}}$$

Tre tilfeller:

$b^2 - 4ac > 0$ gir to løsninger

$b^2 - 4ac = 0$ gir én løsning

$b^2 - 4ac < 0$ gir ingen løsninger

<u>Oppg</u> Bestem antall løsninger.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ — $5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0$: to løsn.

b) $-x^2 + 2x - 1 = 0$ — $2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 0$: én løsn.

c) $4x^2 - 5x - 5 = 0$ — $(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5) > 0$: to løsn.