MET 1180, forelesning 8, 20. sept. 2022, Runar Ile

Plan: 1. Repetisjon (oppgaver fra forrige uke)
2. Polynomdivisjon og faktorisering

1. Repetisjon (oppg. fra forrige uke)

2m) Løs likningen $9x^2 - 6x + 1 = 0$ $\quad 1:9$

$$\underbrace{x^2 - \tfrac{2}{3}x}_{} + \tfrac{1}{9} = 0$$

Fullfører kvadratet: $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \underbrace{- \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}}_{0} = 0$

så $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 0$

så $x - \frac{1}{3} = 0$ så $\underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}$

Alternativ: $\underline{u = 3x}$ gir $u^2 = (3x)\cdot(3x) = 3^2 \cdot x^2$
$= 9x^2$

og $-6x = -2\cdot(3x) = -2u$

Likningen blir $u^2 - 2u + 1 = 0$

$$(u-1)^2 = 0$$

så $u - 1 = 0$

$$3x = u = 1$$

Altså $\underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}$

3e) Bestem andregradslikningen med løsningene $x = 3 \pm \sqrt{5}$

dvs. $x = 3 + \sqrt{5}$, $x = 3 - \sqrt{5}$

Da har vi $\left(x-(3+\sqrt{5})\right)\cdot\left(x-(3-\sqrt{5})\right)$

$$= x^2 - (3-\sqrt{5})x - (3+\sqrt{5})x + (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$$

$$= x^2 - 6x + 3^2 - (\sqrt{5})^2 = x^2 - 6x + 4$$

Så likningen $x^2 - 6x + 4 = 0$ har de oppgitte løsningene. $(b=-6,\ c=4)$

5c) Bestem k slik at

$$\frac{1}{k}x^2 - 14x = 12$$ har akkurat én løsning

<u>Merk</u> $k \neq 0$. Multipliserer bs med k:

$$(x-7k)(x-7k) = x^2 - 7kx - 7kx + (-7k)^2$$

$$x^2 - 14kx = 12k$$

Fullfører kvadratet:

$$(x-7k)^2 = 12k + (7k)^2$$

har akkurat én løsning hvis og bare hvis

$HS = 0$, dvs $12k + 49k^2 = 0$

dvs $k\cdot(12+49k) = 0$

dvs $k=0$ eller $12+49k = 0$

– ikke gyldig!

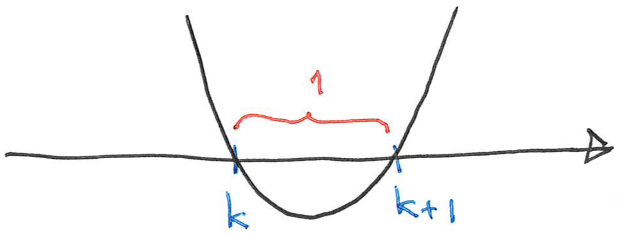
$$\underline{\underline{k = -\frac{12}{49}}}$$

Parametre : Tall som ikke er spesifiserte
- brukes til å beskrive mange situasjoner på en gang.

Eks Prisen på en vare er p kroner

Oppg 7a Alle polynomer $x^2 + bx + c$ som har to røtter med avstand 1 til hverandre

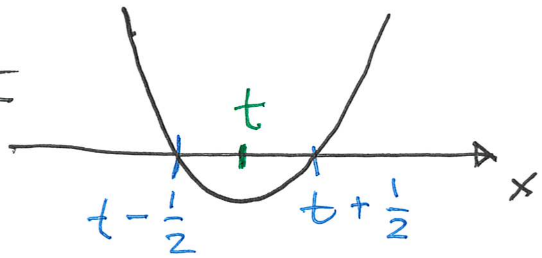
kan skrives som



$$(x-k)\cdot(x-(k+1))$$

$$= \underline{\underline{x^2 - (2k+1)x + k(k+1)}}$$

Eller



Får

$$\left(x - \left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right)\cdot\left(x-\left(t+\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \underline{\underline{x^2 - 2tx + t^2 - \tfrac{1}{4}}}$$

Vendelig mange korrekte løsninger.

8a) Løs likningen $(2x-\sqrt{3})\cdot(x^2 - 20x + 99) = 0$

$a \cdot b = 0$ gir $a = 0$ el. $b = 0$

Enten $2x - \sqrt{3} = 0$ dvs $\underline{\underline{x = \frac{\sqrt{3}}{2}}}$

eller $x^2 - 20x + 99 = 0$

$(x-10)^2 = 10^2 - 99 = 1$

$x - 10 = 1$ el $x - 10 = -1$

$\underline{\underline{x = 11}}$ el. $\underline{\underline{x = 9}}$

Start : 15.00

2. Polynomdivisjon og faktorisering

Vil dividere et polynom $f(x)$ med et polynom $g(x)$ med (evt.) et restledd $r(x)$.

$$g(x)\cdot\Big|\quad \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$ med $\text{grad}(r(x)) < \text{grad}(g(x))$

gir $f(x) = q(x)\cdot g(x) + r(x)$

Eks $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ og $g(x) = x - 2$

$$(\boxed{3x^2} + 2x + 1) : (\boxed{x} - 2) = \overset{3x^2 : x}{\overset{\shortparallel}{3x}} + \overset{8x : x}{\overset{\shortparallel}{8}} + \frac{17}{x-2}$$

$$\begin{array}{l} -(3x^2 - 6x \qquad) \quad \cdot (x-2) \\ \hline \qquad \boxed{8x} + 1 \\ \quad -(\,8x - 16) \quad \cdot(x-2) \\ \hline \qquad\quad 17 \end{array}$$

kalles resten

Så $q(x) = 3x + 8$ og $r(x) = 17$

Kan sjekke regningen: $\left(3x + 8 + \frac{17}{x-2}\right)(x-2)$

$$= (3x+8)(x-2) + \frac{17}{\cancel{x-2}}\cdot\cancel{(x-2)}$$

$$= 3x^2 - 6x + 8x - 16 + 17 = 3x^2 + 2x + 1 = f(x)$$

– så ok!

To anvendelser av polynomdivisjon

Ⓐ Å finne asymptoter til rasjonale funksjoner

<u>Eks</u> $\frac{3x^2+2x+1}{x-2} = 3x+8 + \frac{17}{x-2}$

har vertikal asymptote : linjen $x=2$

og en skrå asymptote : linjen $y = 3x+8$

Ⓑ Å faktorisere et polynom som et produkt av grad 1 (lineære) polynomer

<u>Eks</u> Faktorisér $x^3-4x^2-11x+30$ i lineære faktorer.

<u>Løsning</u> Tre steg.

<u>Steg 1</u> Gjetter på en heltallsrot.

Jeg prøver $\underline{x=-3}$ og får

$(-3)^3 - 4\cdot(-3)^2 - 11\cdot(-3) + 30$

$= -27 - 36 + 33 + 30 = 0$.

Da er $(x-(-3)) = (x+3)$ en faktor.

<u>Steg 2</u> Bruker polynomdivisjon til å finne et polynom av 1 lavere grad:

$x^3-4x^2-11x+30 : (x+3) \overset{\text{ved poly.div.}}{=} x^2-7x+10$

Merk : Resten er 0 !

Steg 3 Finner røttene til $x^2 - 7x + 10$.

De er $x = 2$, $x = 5$

så $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$.

Dermed er $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x-2)(x-5)\cdot(x+3)$

Merk 1 Ikke alltid mulig å faktorisére!

Eks $x^2 + 5$ kan ikke faktoriseres.

$x^2 + 2x + 3$ ——— " ———

$b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0$

Merk 2 Det kan være vanskelig å gjette på røtter. Noen ganger er ikke røttene heltall.