MET 1180, 9. forelesning, 22. sept. 2022, Runar Ile

Plan 1. Rasjonale og irrasjonale likninger
2. Ulikheter

1a. Rasjonale likninger

En rasjonal likning: $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ (std. form)

her er $p(x)$ og $q(x)$ er polynomer

Eks $\frac{x+1}{(x-1)(x+3)} = 0$ Da er $x+1 = 0$ og $(x-1)(x+3) \neq 0$ dvs $x \neq 1$, $x \neq -3$.

Da er $\underline{\underline{x=-1}}$ eneste løsning

Eks (Oppg 10a fra forrige uke)

Likn: $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} = 0$

· VS er en geometrisk rekke med

$a_1 = 1$, $k = x$, $n = 100$. Da gir formelen

VS i likningen $1 \cdot \frac{x^{100}-1}{x-1} = 0$ $(*)$

dvs $x^{100} - 1 = 0$ og $x - 1 \neq 0$

dvs $x^{100} = 1$ og $x \neq 1$

dvs $x = \pm\sqrt[100]{1} = \pm 1^{\frac{1}{100}} = \pm 1$ og $x \neq 1$

Så $x = -1$ er eneste løsning på $(*)$

Må sjekke $x = 1$ separat:

$VS = 1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^{99} = 100 \neq HS = 0$

Så $\underline{\underline{x=-1}}$ er eneste løsning på den gitte likningen

Eks $\dfrac{x+1}{(x-1)(x+3)} = 2 \qquad (x \neq 1,\ x \neq -3)$

$\dfrac{x+1}{(x-1)(x+3)} - 2 = 0 \qquad$ — " —

Setter på felles nevner: Multipliserer -2

med $\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = 1$

$$\frac{x+1 - 2(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = 0$$

Løser opp og trekker sammen telleren

$\dfrac{x+1 - 2(x^2+3x-x-3)}{(x-1)(x+3)} = 0 \qquad (x \neq 1,\ x \neq -3)$

$\dfrac{-2x^2 - 3x + 7}{(x-1)(x+3)} = 0 \qquad$ — " —

- finner nullpunktene (røttene) til telleren og sjekker at de ikke er 1 eller -3.

1b. Irrasjonale likninger

- den ukjente står under roten!

Eks $2 \cdot \sqrt{x+1} = x - 2$

kvadrerer b.s.

$$4(x+1) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$4x + \cancel{4} = x^2 - 4x + \cancel{4}$$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x-8) = 0$$

$\underline{x = 0}$ el. $\underline{x = 8}$

– trenger ikke være løsninger på den opprinnelige likningen

Vi må teste kandidatene:

$\underline{x=0}$ v.s. $2 \cdot \sqrt{0+1} = 2\sqrt{1} = 2$
h.s. $0 - 2 = -2$
} ikke like! $x=0$ er ikke en løsning

$\underline{x=8}$ v.s. $2 \cdot \sqrt{8+1} = 2\sqrt{9} = 6$
h.s. $8 - 2 = 6$
} er like! – så $\underline{\underline{x=8}}$ er eneste løsning.

---

2. Ulikheter

$-2 < -1$ leses: „minus to er mindre enn minus en"

$\frac{1}{9} > \frac{1}{12}$ leses: „en nidel er større enn en tolvdel"

også $\leq$ og $\geq$

- En ulikhet er en påstand om at ett uttrykk (tall) er mindre enn / større enn.... enn et annet uttrykk (tall).
- Løsningene på ulikheten er de x-verdiene som gjør påstanden sann.

Eks $\quad x-1 \geq 2$

- er sann hvis $x=5$ fordi $5-1 \geq 2$ sant
- er usant hvis $x=2$ fordi $2-1 \geq 2$

ikke er sant

I eks. er løsningene $\quad \underline{\underline{x \geq 3}}$

– uendelig mange løsninger

Kan også skrive løsningene slik:

$$x \in [3, \infty\rangle$$

også slik: $x \in [3, \rightarrow\rangle$

Eks $\quad$ Løs ulikheten $\quad \dfrac{x(x-10)}{(x-5)} \geq 0$

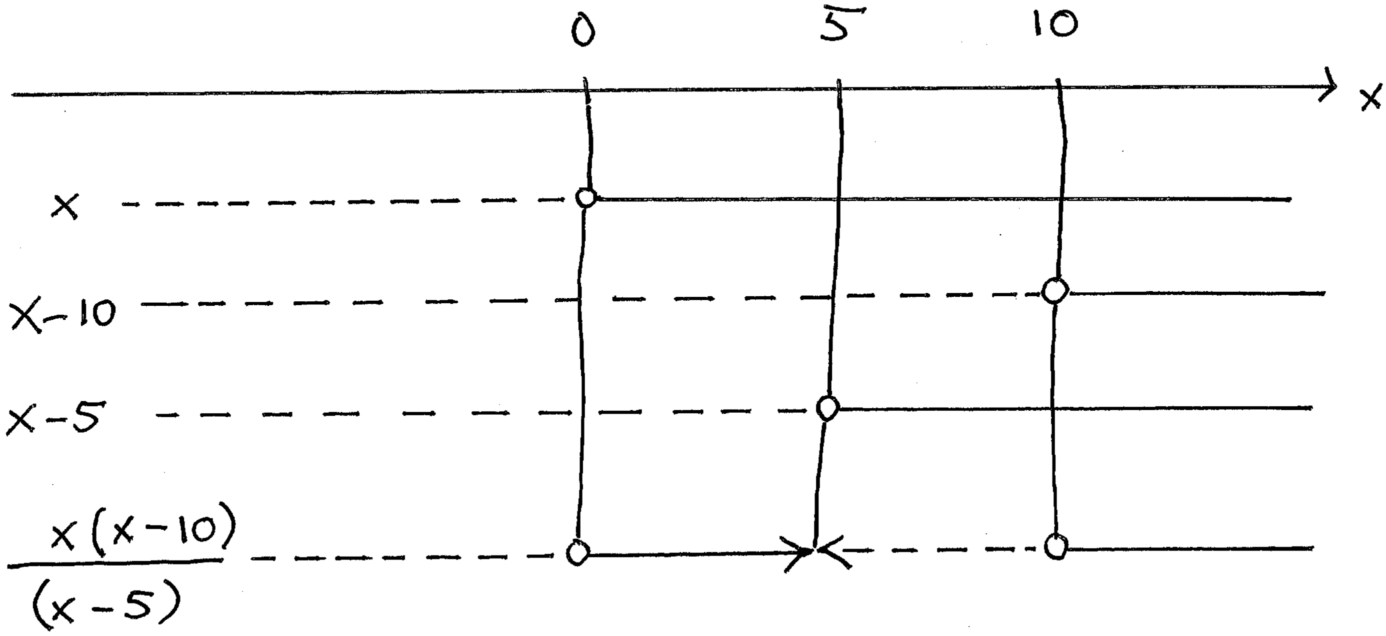
Løsning $\quad$ Fordi vi har 0 på h.s. og én ferdig faktorisert brøk på v.s. kan vi bruke fortegnsskjema

Nullpunkter for teller: $\quad \underline{x=0}, \quad x-10=0$

$$\underline{x=10}$$

——"—— nevner: $\quad x-5=0$

$$\underline{x=5}$$



dvs $\underline{\underline{0 \leq x < 5 \quad \text{eller} \quad x \geq 10}}$

alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in [0, 5\rangle \quad \text{eller} \quad x \in [10, \rightarrow\rangle}}$

<u>Eks</u> (Fagprøve 2020h)

Løs ulikheten $\dfrac{2x-12}{(x-3)(x+4)} \geq 1$

<u>Løsning</u> Vi har ikke 0 på h.s. og kan derfor ikke bruke fortegnsskjema. Trekker derfor 1 fra b.s. og lager felles nevner:

$$\frac{2x-12}{(x-3)(x+4)} - 1 \cdot \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+4)} \geq 0$$

Skriver v.s. som én brøk, ok fordi nevnerne er like :

$$\frac{2x-12-(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+4)} \geq 0$$

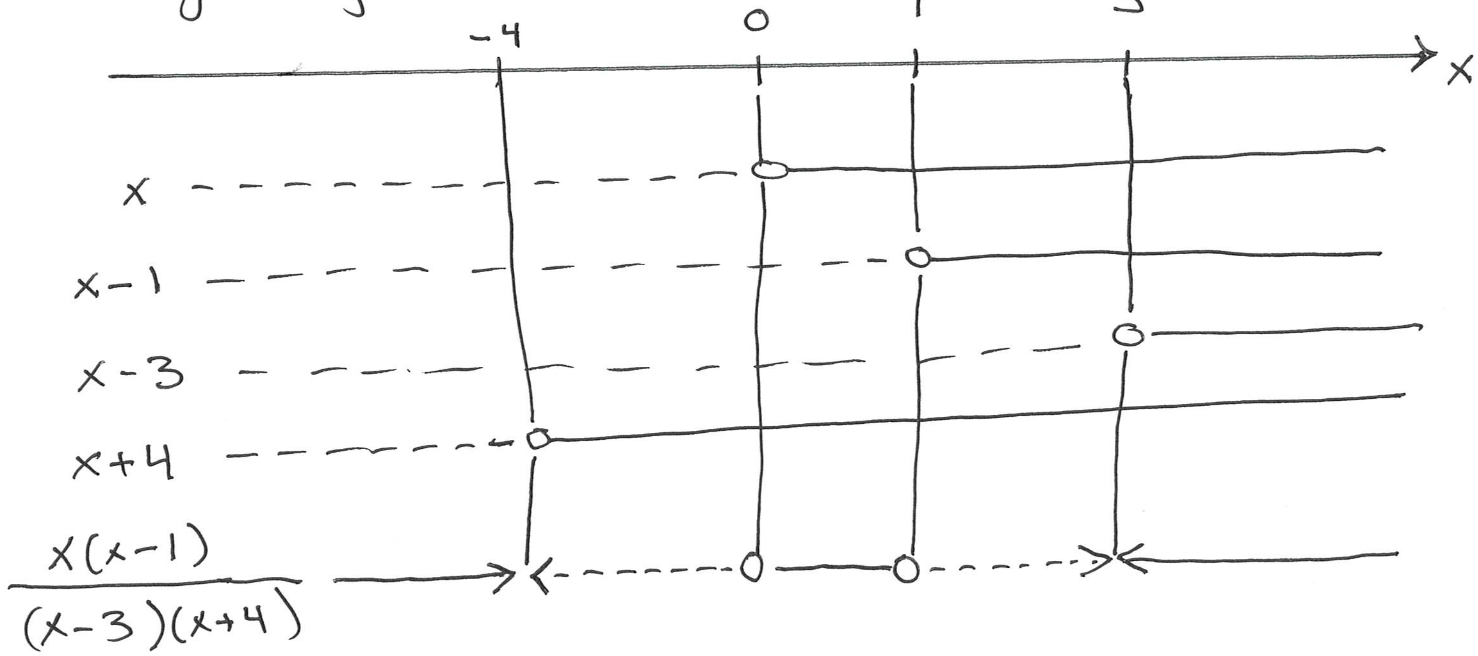
$$\frac{2x-12-(x^2+x-12)}{(x-3)(x+4)} \geq 0$$

$$\frac{-x^2+x}{(x-3)(x+4)} \geq 0$$

$$\frac{x(-x+1)}{(x-3)(x+4)} \geq 0 \qquad \Big| \cdot (-1)$$

$$\frac{x(x-1)}{(x-3)(x+4)} \leq 0$$

Fortegnsskjema :



dvs $\underline{\underline{-4 < x \leq 0 \text{ eller } 1 \leq x < 3}}$

Alternativ: $\underline{\underline{x \in \langle -4, 0] \text{ eller } x \in [1, 3\rangle}}$