MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2022
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing.

R. Lucas

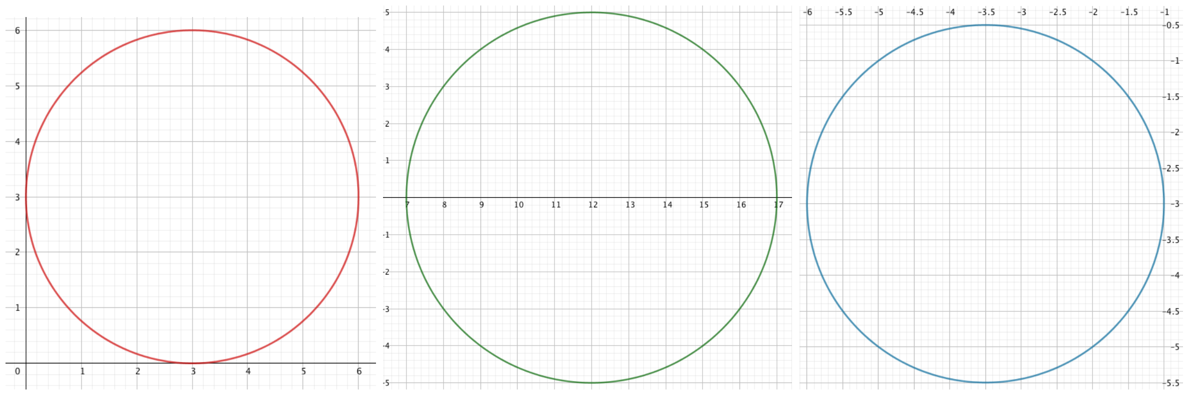
Forelesning 11-12
Kap 3.6-8: Monotoni. Sirkler og ellipser. Polynomfunksjoner.

[L] 3.6.1-3
[L] 3.7.1-3
[L] 3.8.1-4

Flervalgseksamen 2018v oppg 7

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 6/10 fra kl 10-14 i D1-065/70 fra kl 14 i D3-180, D3-141 og D3-037

Oppgave 1 Finn likningene til sirklene i figur 1.



Figur 1: Sirkler a-c

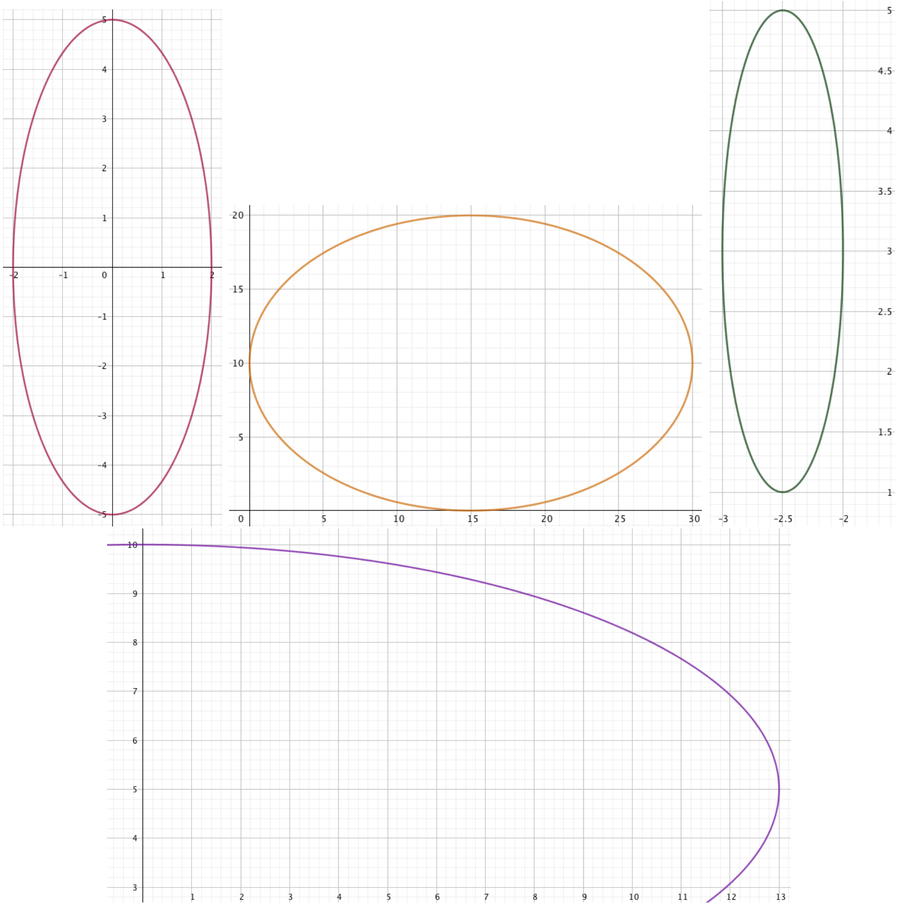
Oppgave 2 Bestem sentrum S og radius r til sirklene.

a) $(x-3)^2+(y-4)^2=5$ b) $(x+1)^2+y^2=3$ c) $(3x-2)^2+(3y-4)^2=9$

d) $x^2+y^2-4x-10y=-25$ e) $x^2+y^2+6x-12y=-44$

f) $25x^2+25y^2-20x-30y=-12$

Oppgave 3 Finn likningene til ellipsene i figur 2.



Figur 2: Ellipser a-d

Oppgave 4 Bestem sentrum S og halvakser til ellipsen. Tegn en skisse av ellipsen.

a) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$

b) $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

c) $16(x-1)^2+9(y-2)^2=144$

d) $\dfrac{x^2}{2}+y^2-6y=-8$

e) $9x^2+18x+4y^2=27$

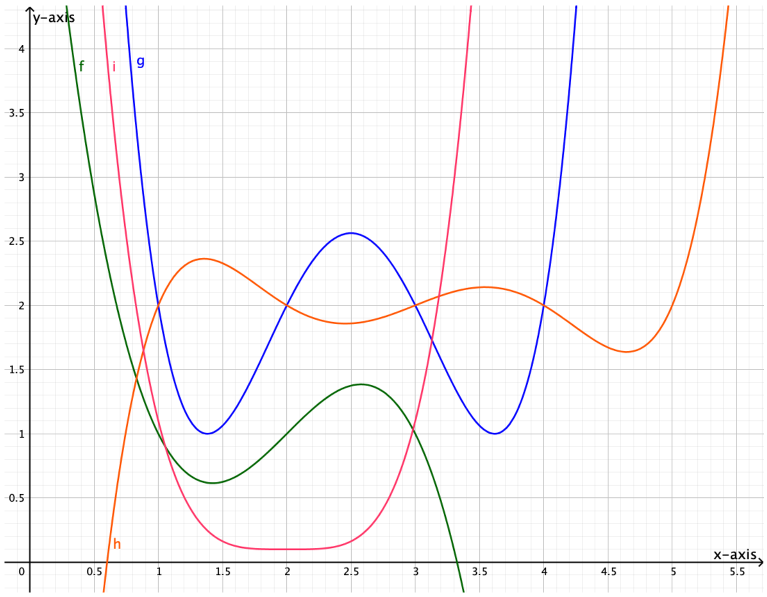
f) $4x^2+9y^2-16x+18y=11$

g) $25x^2+4y^2-100x-40y=-100$

Oppgave 5 Finn elementære argumenter for at:
a) $f(x)=x^2$ med $x\geqslant 0$ er strengt voksende
b) $f(x)=\sqrt{x}$ er strengt voksende
c) $f(x)=\frac{1}{x}$ med $x>0$ er strengt avtagende

Oppgave 6 Finn skjæringspunktene mellom
a) linjen $3x+2y=12$ og linjen $-3x+2y=-6$
b) linjen $2x+y=6$ og ellipsen i oppgave 4a

Oppgave 7 Avgjør hvilke uttrykk (under) og grafer (i figur 3) som hører sammen.
1) $x^4-8x^3+24x^2-32x+\dfrac{161}{10}$
2) $\dfrac{x^5}{10}-\dfrac{3x^4}{2}+\dfrac{17x^3}{2}-\dfrac{45x^2}{2}+\dfrac{137x}{5}-10$
3) $-x^3+6x^2-11x+7$
4) $x^4-10x^3+35x^2-50x+26$



Figur 3: Grafene til fire polynomfunksjoner

Fasit

Oppgave 1

a) $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ b) $(x-12)^2+y^2=25$ c) $(x+3{,}5)^2+(y+3)^2=6{,}25$

Oppgave 2

a) $S=(3,4)$, $r=\sqrt{5}$ b) $S=(-1,0)$, $r=\sqrt{3}$ c) $S=(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$, $r=1$

d) $S=(2,5)$, $r=2$ e) $S=(-3,6)$, $r=1$ f) $S=(\frac{2}{5},\frac{3}{5})$, $r=\frac{1}{5}$

Oppgave 3

a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ b) $\frac{(x-15)^2}{225}+\frac{(y-10)^2}{100}=1$ c) $4(x+2{,}5)^2+\frac{(y-3)^2}{4}=1$

d) $\frac{x^2}{169}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$

Oppgave 4

a) $S=(0,0)$, halvakser $a=3$, $b=4$

b) $S=(1,2)$, halvakser $a=3$, $b=4$

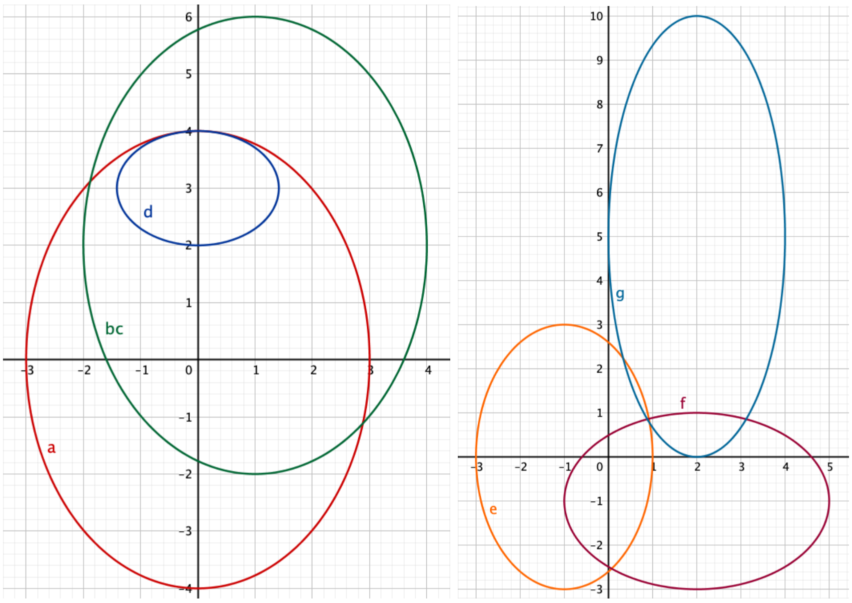
c) $S=(1,2)$, halvakser $a=3$, $b=4$

d) $S=(0,3)$, halvakser $a=\sqrt{2}$, $b=1$

e) $S=(-1,0)$, halvakser $a=2$, $b=3$

f) $S=(2,-1)$, halvakser $a=3$, $b=2$

g) $S=(2,5)$, halvakser $a=2$, $b=5$



Figur 4: Ellipser a-d og e-g

Oppgave 5

a) Anta $0 \leqslant x_1 < x_2$. Da er $x_2 = x_1 + k$ for en positiv konstant k. Da er $f(x_2) = (x_1 + k)^2 = x_1^2 + 2kx_1 + k^2$. Sum og produkt av to positive tall er positive tall. Derfor er $2kx_1 + k^2$ et positivt tall. Altså er $f(x_1) = x_1^2 < x_1^2 + 2kx_1 + k^2 = f(x_2)$ og $f(x) = x^2$ for $x \geqslant 0$ er strengt voksende.

b) Vi deler begge sider av ulikheten $x_1 < x_2$ med det positive tallet x_2 og får den ekvivalente ulikheten $\frac{x_1}{x_2} < 1$. Kvadratroten av et tall som er mindre enn 1 er selv mindre enn 1, dvs $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} < 1$. Men $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}$. Vi får ulikheten $\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} < 1$ og når vi multipliserer hver side med det positive tallet $\sqrt{x_2}$ får vi ulikheten $f(x_1) = \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} = f(x_2)$. Altså er $f(x) = \sqrt{x}$ strengt voksende.

c) Vi deler begge sider av ulikheten $x_1 < x_2$ med det positive tallet x_2 og får den ekvivalente ulikheten $\frac{x_1}{x_2} < 1$. Så deler vi denne ulikheten med det positive tallet x_1 og får $f(x_2) = \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} = f(x_1)$. Altså er $f(x) = \dfrac{1}{x}$ for $x > 0$ strengt avtagende.

Oppgave 6

a) $(3\,,\,\frac{3}{2})$

b) $(3\,,0)$ og $(\frac{15}{13}\,,\,\frac{48}{13})$

Oppgave 7

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 7$$

$$g(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 26$$

$$h(x) = \frac{x^5}{10} - \frac{3x^4}{2} + \frac{17x^3}{2} - \frac{45x^2}{2} + \frac{137x}{5} - 10$$

$$i(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + \frac{161}{10}$$