Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Regn ut følgende indreprodukter når

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$
b) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3$
c) $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2$
d) $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_4$
e) $\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$
f) $\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$
g) $(\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$
h) $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$

Oppgave 2.
Finn så mange vektorer som mulig som står normalt på vektoren $\mathbf{v}$:

a) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
c) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
d) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Oppgave 3.
Bestem $||\mathbf{v} - \mathbf{w}||$ når vektorene $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ står normalt på hverandre og har lengde $||\mathbf{v}|| = 3$ og $||\mathbf{w}|| = 4$.

Oppgave 4.
Finn det naturlige definisjonsområdet D_f og verdimengden V_f til f:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$
b) $f(x,y) = \sqrt{x + 3y}$
c) $f(x,y) = (2x - y)^{-3/2}$
d) $f(x,y) = 17x^{1.2}y^{3.4}$

Oppgave 5.
Vi ser nivåkurven $f(x,y) = c$ til en funksjon $f(x,y)$. Tegn inn nivåkurvene for de oppgitte verdiene av c i samme koordinatsystem, og avgjør hva slags kurve vi får når vi lar c være en hvilken som helst verdi:

a) $f(x,y) = 12x - 3y$ og $c = -3, 0, 3$
b) $f(x,y) = xy$ og $c = -1, 0, 1$
c) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y$ og $c = -9, -5, -1$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$ og $c = -2, -1, 0, 1$

Oppgave 6.
Bruk nivåkurvene $f(x,y) = c$ fra Oppgave 5 til å avgjøre om funksjonen har maksimums- eller minimumsverdier:

a) $f(x,y) = 12x - 3y$
b) $f(x,y) = xy$
c) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$

Oppgave 7.
Beskriv grafen til $f(x,y) = 3x - 4y + 1$ geometrisk. Med geometrisk beskrivelse mener vi for eksempel: *Grafen til* $f(x) = 3 - 2x$ *er en rett linje med stigningstall* -2 *som skjærer y-aksen i* $y = 3$, altså en presis geometrisk beskrivelse uten bruk av likninger eller liknende.

Oppgave 8.
Finn de partiellderiverte f'_x og f'_y når

a) $f(x,y) = 2x + 3y$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$
e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$
h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 9.
Finn Hesse-matrisen $H(f)$, og regn ut $H(f)(1,1)$:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$
e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$
h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 10.
Finn de stasjonære punktene til f, og klassifiser dem:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$
e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$
h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 11.
Finn alle stasjonære punkter og klassifiser dem:

a) $f(x,y) = xy(x^2 - y^2)$
b) $f(x,y) = x^2y + xy^3 + xy^2$
c) $f(x,y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

Oppgaver fra læreboken

Læreboken [E]:	Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans*
Oppgaveboken [O]:	Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans - Oppgaver og Løsningsforslag*

Oppgaver:	[E] 7.1.1 - 7.1.4, 7.2.1 - 7.2.2, 7.3.1 - 7.3.5, 7.4.1 - 7.4.2
Fullstendig løsning:	Se [O] Kap 7.1 - 7.4

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

a) 0 b) 4 c) 2 d) 13

e) 4 f) -4 g) 18 h) 5

Oppgave 2.

Alle lineærkombinasjoner av de oppgitt vektorene:

a) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\4\\0\end{pmatrix}$

Oppgave 3.

5

Oppgave 4.

a) $D_f = \mathbb{R}^2,\ V_f = \mathbb{R}$

b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y \geq 0\},\ V_f = [0,\infty)$

c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y > 0\},\ V_f = (0,\infty)$

d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0\},\ V_f = [0,\infty)$

Oppgave 5.

a) Rett linje med stigningstall 4 som skjærer y-aksen i $y = c/3$

b) Hyperbel $y = c/x$ hvis $c \neq 0$, og de to aksene hvis $c = 0$

c) Sirkel med radius $\sqrt{c+5}$ og sentrum $(-1,2)$ hvis $c > -5$, ett punkt $(-1,2)$ hvis $c = -5$, ingen punkter ellers

d) Ellipser med sentrum i $(1,0)$ med halvakser $a = \sqrt{c+1}$ og $b = \sqrt{c+1}/2$ når $c > -1$, ett punkt $(1,0)$ hvis $c = -1$, og ingen punkter ellers

Oppgave 6.

a) Hverken maksimum eller minimum

b) Hverken maksimum eller minimum

c) Ikke maksimum men minimumsverdien er $f_{min} = -5$

d) Ikke maksimum men minimumsverdien er $f_{min} = -1$

Oppgave 7.

Grafen er planet som skjærer z-aksen i $z = 1$ og har normalvektor $(3, -4, -1)$.

Oppgave 8.

a) $f'_x = 2,\ f'_y = 3$

b) $f'_x = 2x,\ f'_y = 2y$

c) $f'_x = 8x - 6y,\ f'_y = -6x + 18y$

d) $f'_x = 2x - 2,\ f'_y = 8y$

e) $f'_x = 3x^2 - 3y,\ f'_y = -3x + 3y^2$

f) $f'_x = -3x^2 + 3,\ f'_y = 2y$

g) $f'_x = 2x(y^2 - 1),\ f'_y = 2y(x^2 - 1)$

h) $f'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Oppgave 9.

a) $H(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $H(f) = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix},\ H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$

d) $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},\ H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

e) $H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix},\ H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

f) $H(f) = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

g) $H(f) = \begin{pmatrix} 2(y^2-1) & 4xy \\ 4xy & 2(x^2-1) \end{pmatrix},\ H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

h) $H(f) = (x^2+y^2)^{-3/2} \cdot \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}, \quad H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$

Oppgave 10.

a) ingen

b) (0,0) er lokalt min.

c) (0,0) er lokalt min.

d) (1,0) er lokalt min.

e) (0,0) er sadelpunkt og (1,1) er lokalt min.

f) (1,0) er sadelpunkt og $(-1{,}0)$ er lokalt min.

g) (0,0) er lokalt maks. og $(\pm 1, \pm 1)$ er sadelpunkt

h) ingen; (0,0) er kritisk punkt

Oppgave 11.

a) (0,0) er sadelpunkt

b) (0,0), $(0, -1)$ er sadelpunkt, $(3/25, -3/5)$ er lokalt maks.

c) (0,0) er lokalt (og globalt) maks.