MET 1180, 13. forelesning, 11. okt. 2023, Runar Ile

Plan 1. Rasjonale funksjoner og asymptoter (kap 3.10)
2. Hyperbler (kap. 3.11)

1. Rasjonale funksjoner & asymptoter

Rasjonal funksjon $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ ← polynomer

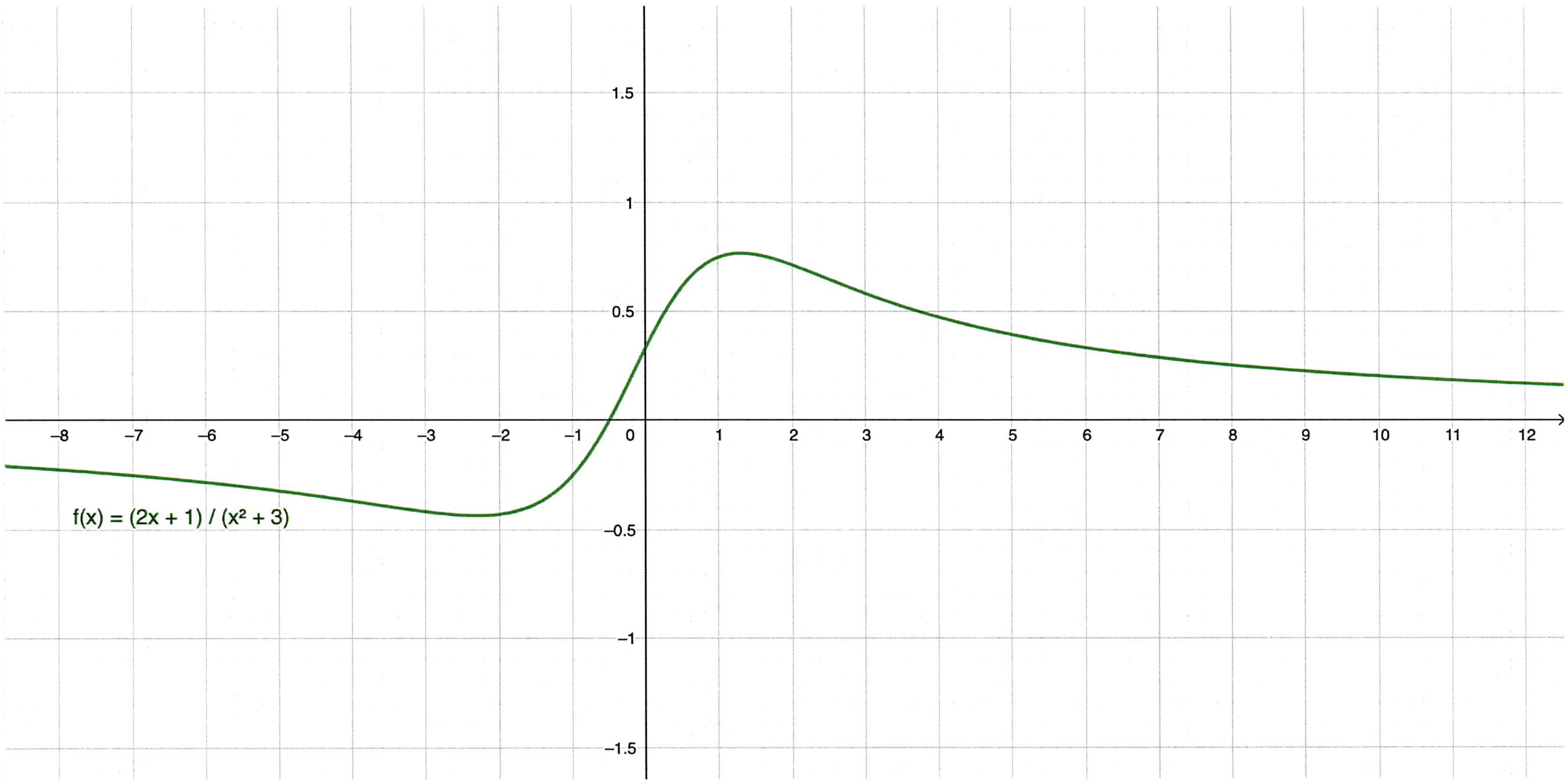
Eks $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+3}$ — vil finne ut hva som skjer når x er stor

— deler på x^2: teller og nevner

$$= \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \frac{0}{1} = 0$$

$$f(1000) = \frac{\frac{2}{1000} + \frac{1}{1000^2}}{1 + \frac{3}{1000^2}} = 0{,}00200099\ldots$$

Dette betyr at linjen $y = 0$ (x fri) er en horisontal asymptote for $f(x)$.
Grafen til $f(x)$ nærmer seg x-aksen (den horisontale asymptoten) når x blir stor pos./neg.


f(x) = (2x + 1) / (x² + 3)
1.5
1
0.5
0
–0.5
–1
–1.5
–8
–7
–6
–5
–4
–3
–2
–1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Eks $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x-5)}$ $\quad (x \neq 1,\ x \neq 5)$

Hva skjer med $f(x)$ når x nærmer seg 1 eller 5 ?

Hvis $x \to 1^-$ „ x nærmer seg 1 nedenfra "

$x = 0{,}9$, $x = 0{,}99$, $x = 0{,}999$, ...

da vil

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \longrightarrow 0^- \\ x-5 \longrightarrow (-4)^- \\ 2x+1 \longrightarrow 3^- \end{array}\right\} \text{medfører at } f(x) = \frac{\overbrace{2x+1}^{\to 3^-}}{\underbrace{(x-1)}_{0^-}\underbrace{(x-5)}_{(-4)^-}} \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$$

Hvis $x \to 1^+$ „ x nærmer seg 1 ovenfra "

$x = 1{,}1$, $x = 1{,}01$, $x = 1{,}001$ ....

da vil

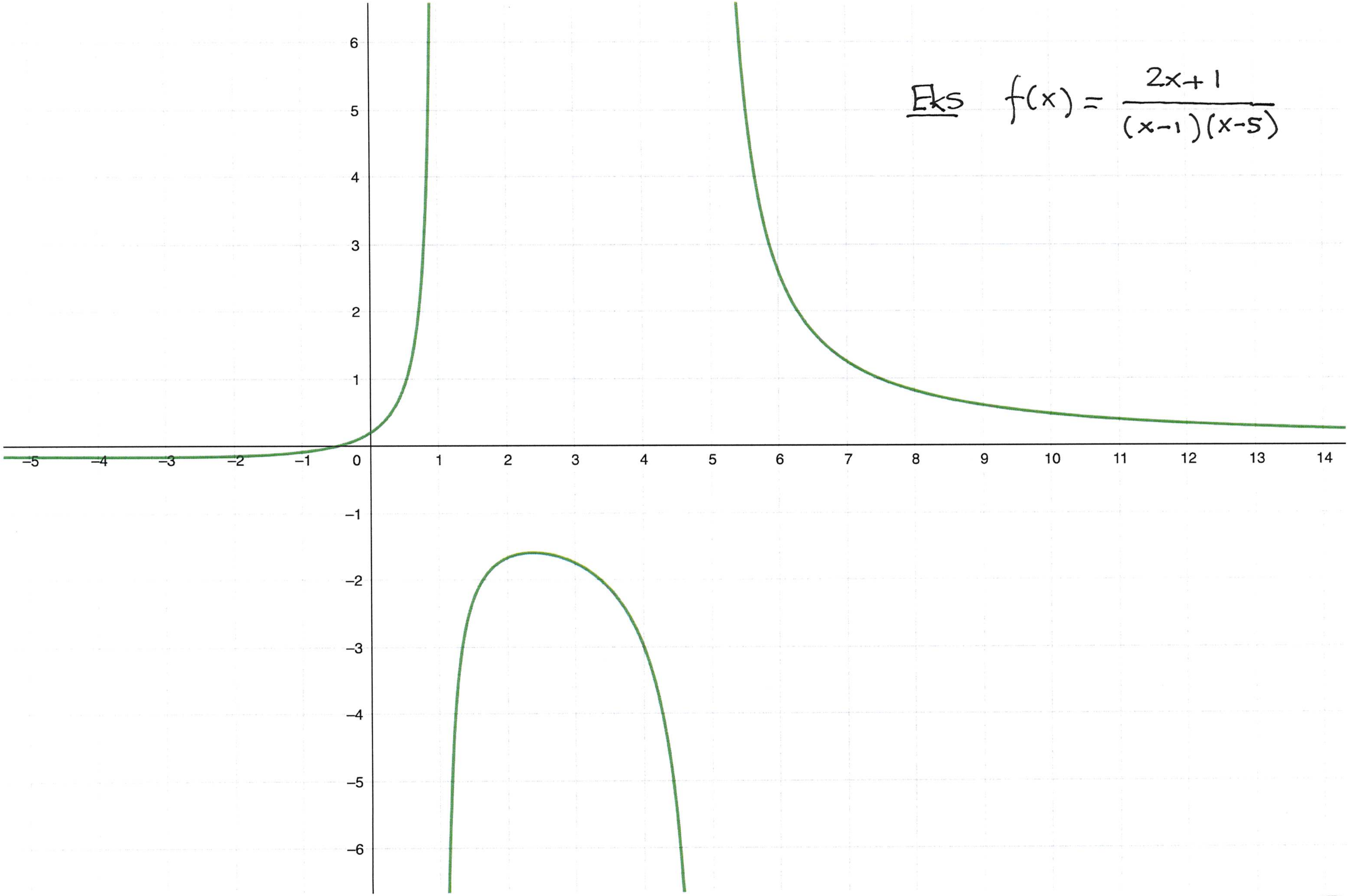
$$\left.\begin{array}{l} x-1 \longrightarrow 0^+ \\ x-5 \longrightarrow (-4)^+ \\ 2x+1 \longrightarrow 3^+ \end{array}\right\} \text{medfører at } f(x) = \frac{\overbrace{2x+1}^{\to 3^+}}{\underbrace{(x-1)}_{0^+}\underbrace{(x-5)}_{(-4)^+}} \xrightarrow[x\to 1^+]{} -\infty$$

Konklusjon Linjen $x = 1$ (y fri) er en vertikal asymptote for $f(x)$. Så grafen til $f(x)$ nærmer seg den vertikale linjen $x=1$ når $x \to 1$.

Merk Linjen $x = 5$ er også en vertikal asymptote for $f(x)$. $f(x) \xrightarrow[x\to 5^-]{} -\infty$ & $f(x) \xrightarrow[x\to 5^+]{} +\infty$

Dessuten har $f(x)$ også den horisontale asymptoten $y = 0$

Eks $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x-5)}$



2b

Skrå asymptoter

Eks $f(x) = x - 5 + \frac{2}{x-4}$ har vertikal asymptote $x = 4$

Men $f(x)$ har også en skrå asymptote:

Setter $g(x) = x - 5$.

Da vil grafen til $f(x)$ nærme seg grafen til $g(x)$ (en skrå linje) når $x \to \pm\infty$ fordi

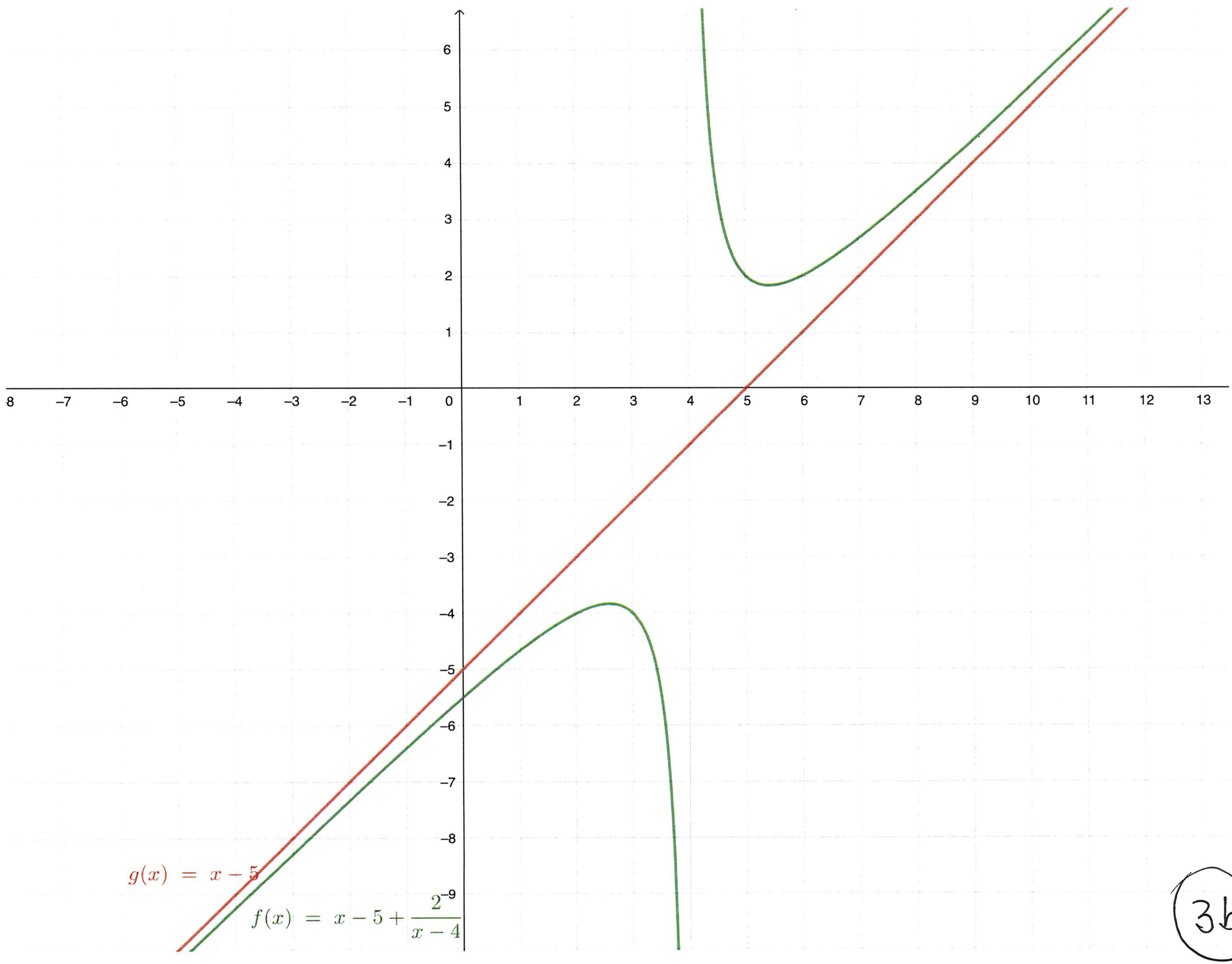
$$f(x) - g(x) = \frac{2}{x-4} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

NB $f(x) = \frac{(x-5)(x-4)+2}{(x-4)} = \frac{x^2-9x+22}{x-4}$

- bruker polynomdivisjon for å få formen $x - 5 + \frac{2}{x-4}$

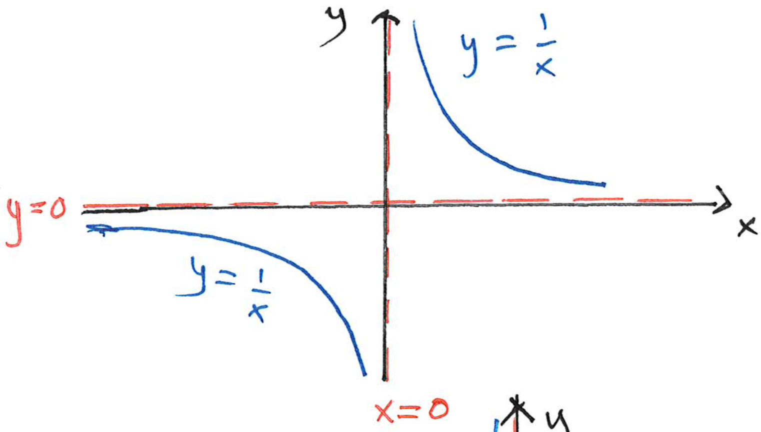
Start: 15.05

Grafen til $g(x)$ er en skrå asymptote for $f(x)$.



3b

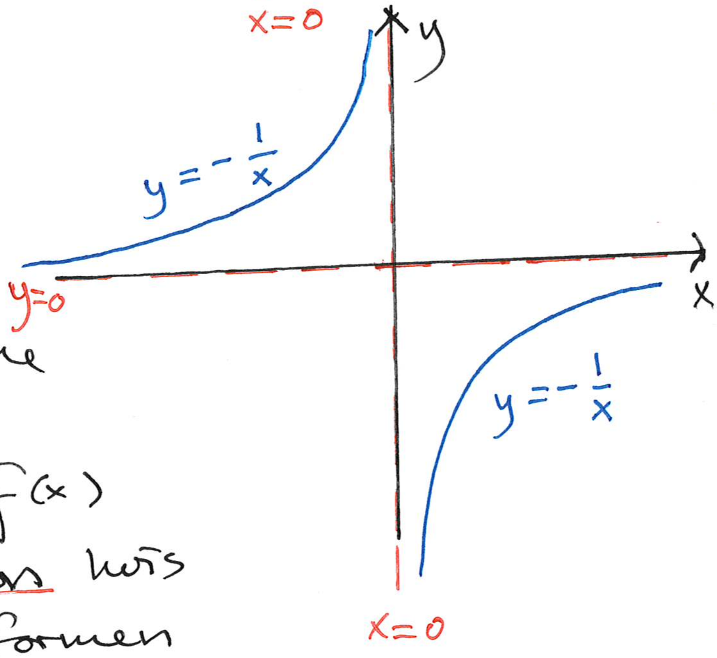
2. Hyperbler



Eks $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

Linjen $x = 0$ er en vertikal asymptote

Linjen $y = 0$ er en horisontal asymptote



Eks $f(x) = -\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

– har de samme asymptotene

Definisjon En funksjon $f(x)$ er en hyperbelfunksjon hvis den kan skrives på formen

$$f(x) = c + \frac{a}{x-b} \qquad (a \neq 0)$$

Eks $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$ er en hyperbelfunksjon fordi polynomdivisjon gir

$$(3x-5):(x-2) = 3 + \frac{1}{x-2}$$
$$\underline{-(3x-6)} \qquad \cdot (x-2)$$
$$1$$

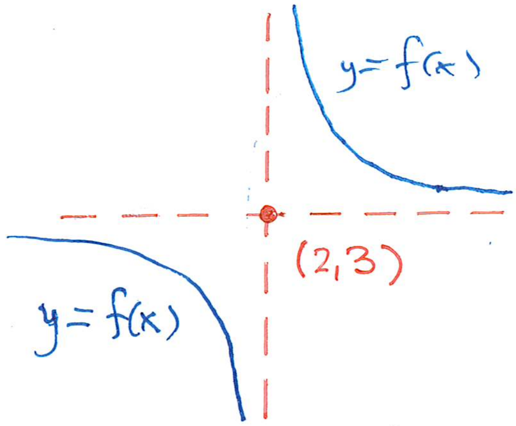
så $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

Så $f(x) = 3 + \frac{1}{x-2}$

Vi har $f(x) = 3 + \frac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to 2^-]{} -\infty$

og $f(x) = 3 + \frac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to 2^+]{} +\infty$

og $f(x) = 3 + \frac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 3$



Så linjen $x = 2$ er en vertikal asymptote

og linjen $y = 3$ er en horisontal asymptote

$f(1) = 3 + \frac{1}{1-2} = 2$

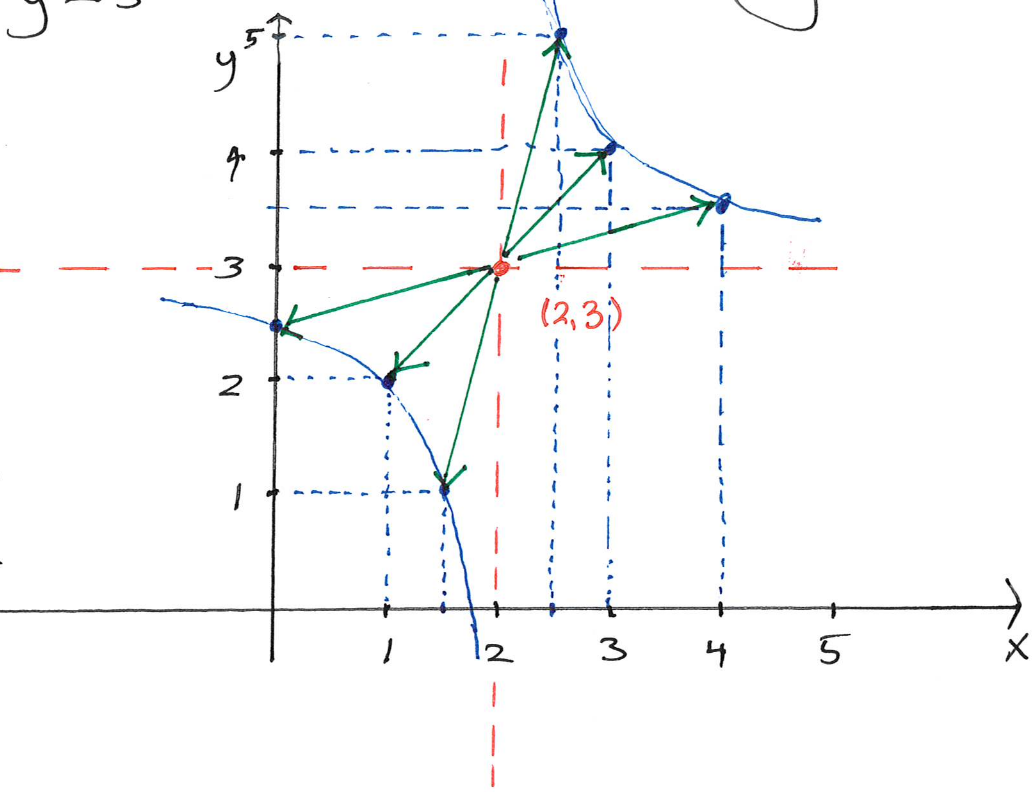
$f(3) = 3 + \frac{1}{3-2} = 4$

$f(1{,}5) = 3 + \frac{1}{1{,}5-2} = 1$

$f(2{,}5) = 3 + \frac{1}{2{,}5-2} = 5$

$f(0) = 3 + \frac{1}{0-2} = 2{,}5$

$f(4) = 3 + \frac{1}{4-2} = 3{,}5$



Grafen er symmetrisk om skjæringspunktet til asymptotene!

2019 høst Fagoppgave

Finn uttrykket for hyperbelfunksjonen

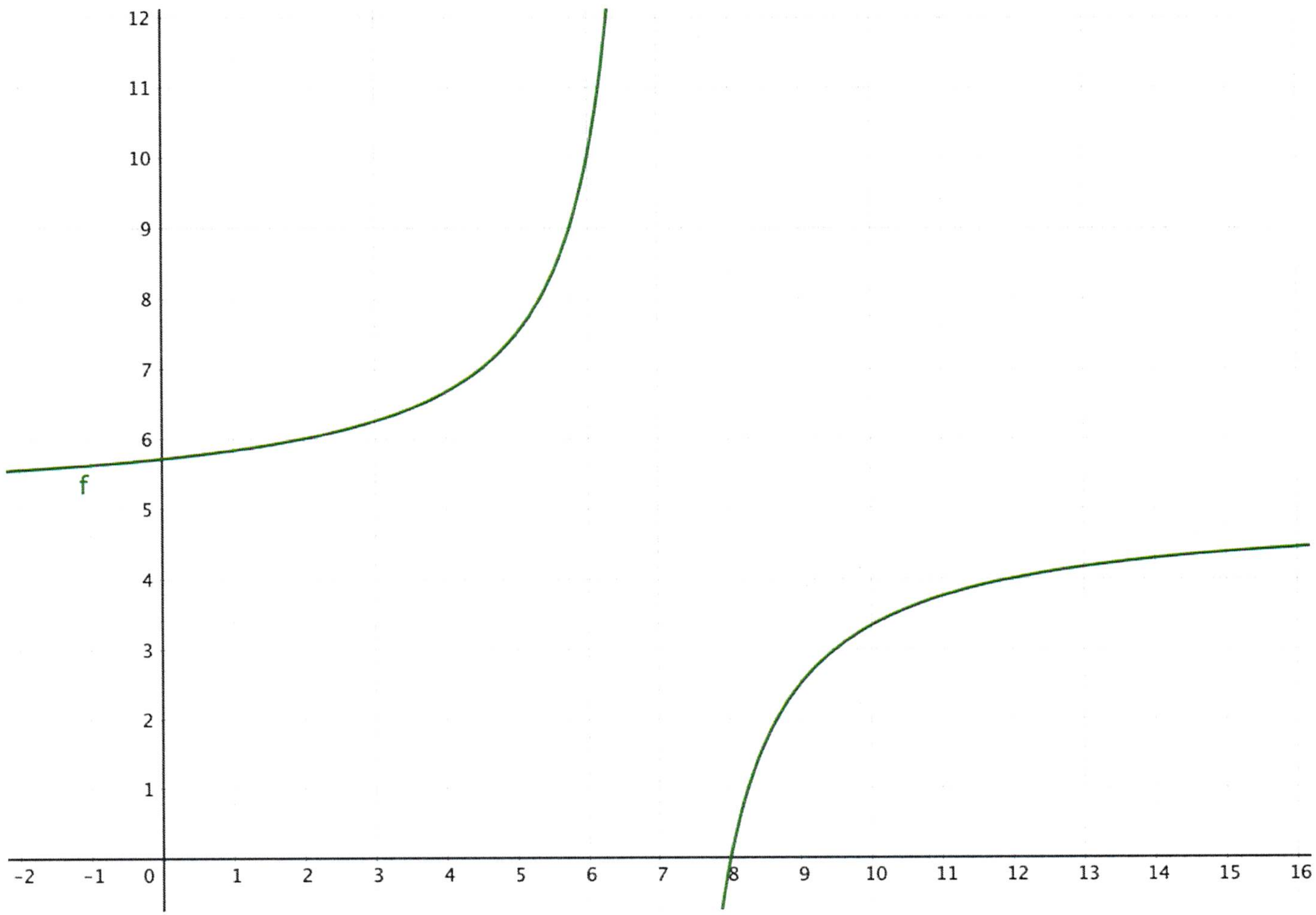


Figure 2: Hyperbola

5c

2019 vår Flervalg

Problem 5

We have the hyperbola function $f(x) = \dfrac{4x-38}{x-10}$. Which of the graphs in figure 1 is the graph of $f(x)$?

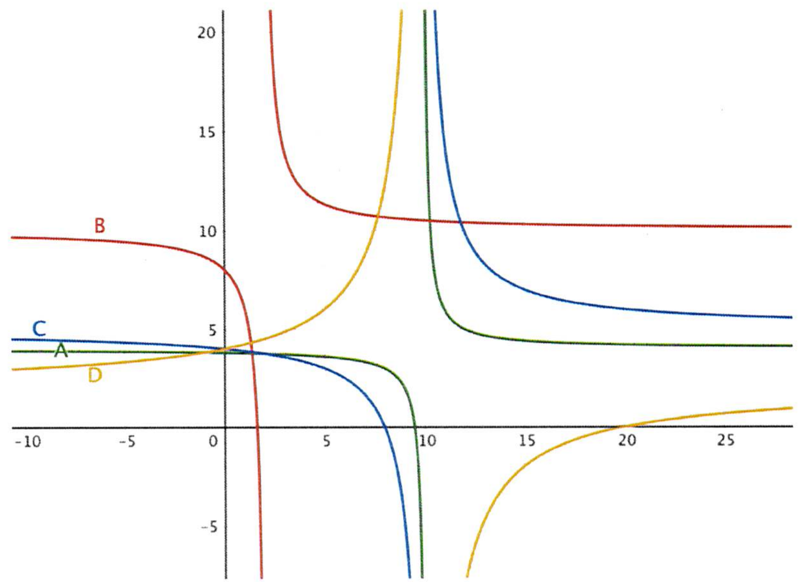


Figure 1: Graphs A-D

(A) $f(x)$ has the graph A (green)
(B) $f(x)$ has the graph B (red)
(C) $f(x)$ has the graph C (blue)
(D) $f(x)$ has the graph D (yellow)
(E) I choose not to answer this problem.

56