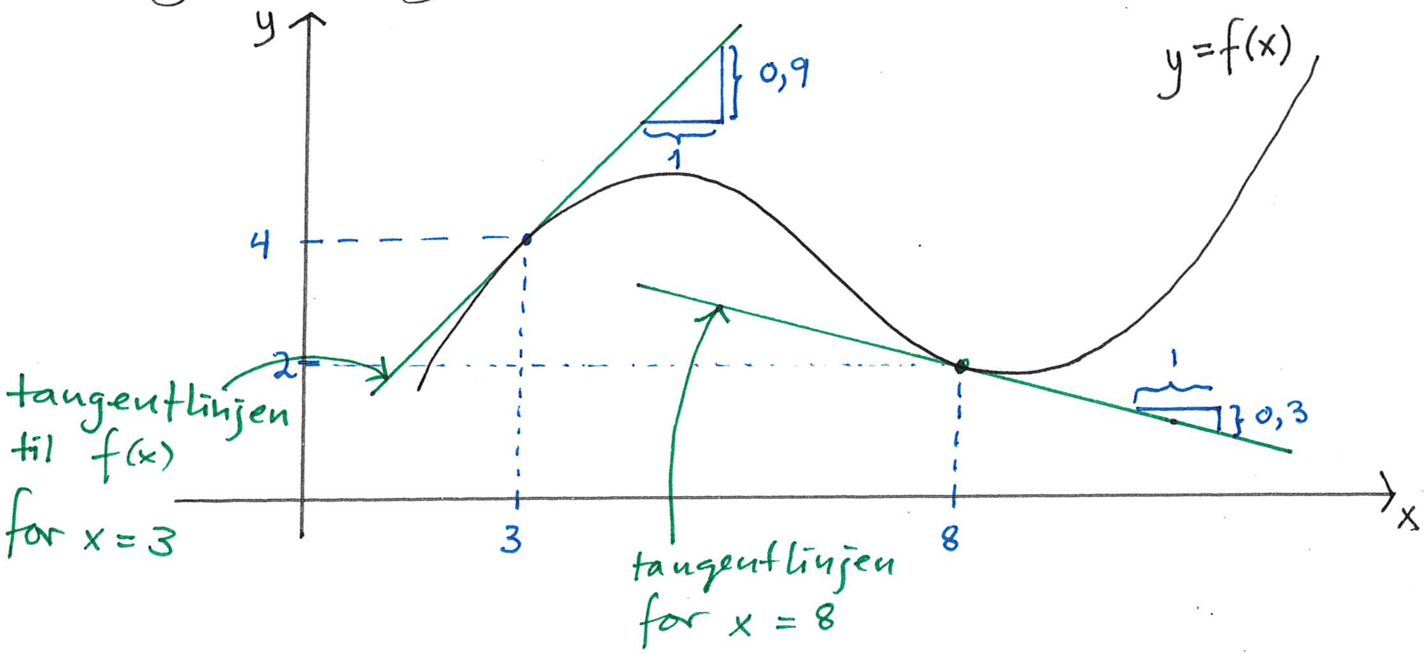
MET 1180, 16. forelesning, 19. okt. 2023, Runar Ile

Plan
1. Tangenter og den deriverte (kap 4.1 og 4.4)
2. Den deriverte som funksjon (kap. 4.2)
3. Derivasjonsreglene (kap. 4.3)

1. Tangenter og den deriverte



I punktet (3, 4) har tangenten til grafen til f(x) stigningstall 0,9. Vi skriver $f'(3) = 0{,}9$

I punktet (8, 2) har tangenten til grafen til f(x) stigningstall −0,3. Vi skriver $f'(8) = -0{,}3$.

To viktige anvendelser

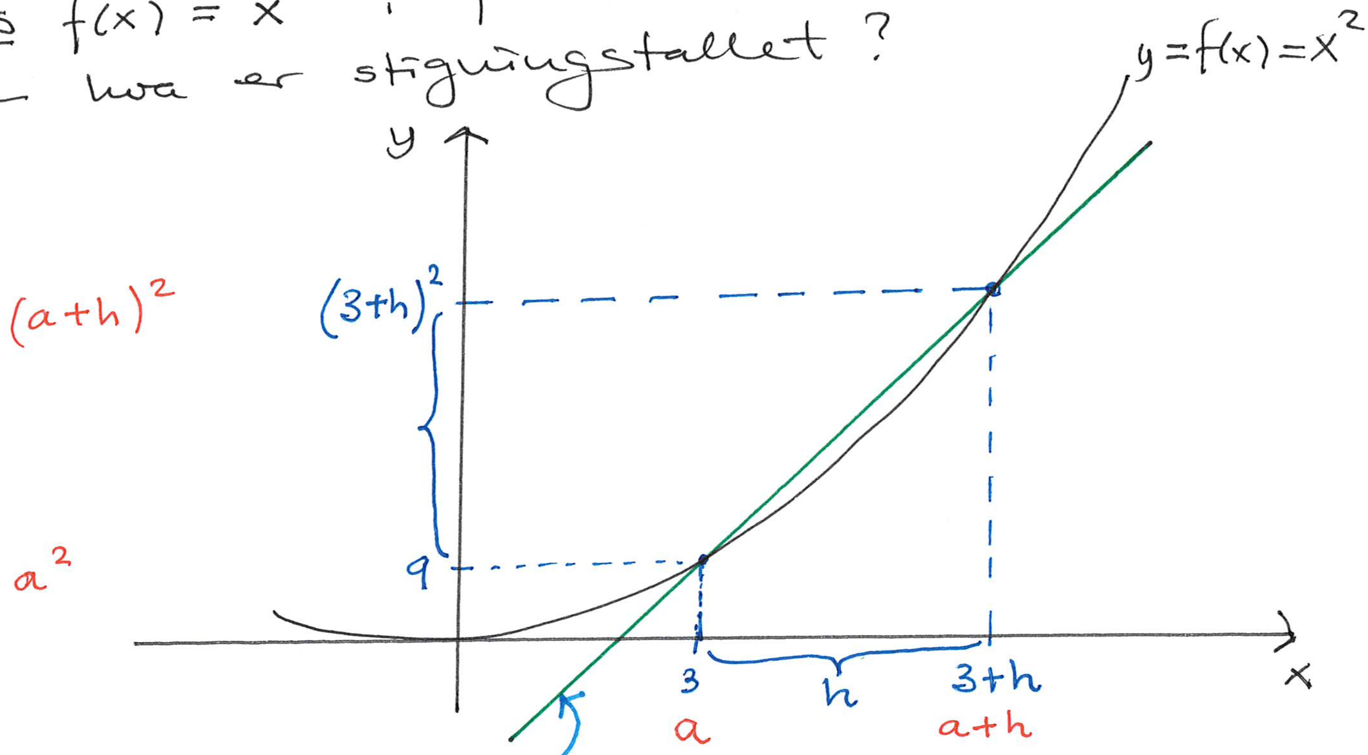
1) Finne hvor funksjonen vokser og avtar og hvor maksimum og minimum er.

2) Tilnærme kompliserte funksjoner med lineære funksjoner
   - matematiske modeller i økonomi er ofte lineære funksjoner

Hvordan finner vi stigningstallet til tangenten?

Eks $f(x) = x^2$ i punktet $(3, 9)$

– hva er stigningstallet?



Stigningstallet til denne sekantlinjen er

$$\frac{\text{endring i } y}{\text{endring i } x} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{(3+h)(3+h) - 9}{h}$$

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \qquad \frac{(a+h)(a+h) - a^2}{h}$$

$$= \frac{\cancel{9} + 2\cdot 3h + h^2 - \cancel{9}}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}}$$

$$\frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h} \qquad \frac{2ah + h^2}{h} \qquad \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}}$$

$$2a + h \xrightarrow[h \to 0]{} 2a$$

$= 6 + h \xrightarrow[h \to 0]{} 6$ som derfor er stigningstallet til tangenten til grafen til $f(x)$ i $(3, 9)$.

Vi skriver $f'(3) = 6$

På samme måte: $f'(a) = 2a$

Start: 9.00

2. Den deriverte som en funksjon

I eks. med $f(x) = x^2$ fikk vi $f'(a) = 2a$
– dette er en funksjon. Vi bruker x som variabel og skriver $f'(x) = 2x$

F. eks. er stigningstallet til tangenten til $f(x) = x^2$ i $(-3, 9)$ lik

$$f'(-3) = 2\cdot(-3) = -6$$

For $(1, 1)$ er stigningstallet $f'(1) = 2\cdot 1 = 2$.

Vi kunne gjort det samme for $f(x) = x^3$

$$\frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \ldots = \underbrace{3a^2 + 3ah + h^2}_{\downarrow\, h\to 0 \quad 3a^2}$$

Så $f'(x) = 3x^2$

3. Derivasjonsregler

Potensregelen $\quad f(x) = x^n$ gir $f'(x) = nx^{n-1}$

NB: Gjelder for alle tall n.

Eks $\quad f(x) = x^{10}$ gir $f'(x) = 10\cdot x^9 \quad (n=10)$

Eks $\quad f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ så $f'(x) = \frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1} \quad (n = \frac{1}{3})$

$$= \frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$$

Addisjonsregelen $\quad f(x) = g(x) + h(x)$

så er $\quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Eks $f(x) = x + x^3$, $\quad f'(x) = 1 + 3x^2$

Konstantregelen $\quad$ Hvis k er et (konstant) tall

og $\quad f(x) = k \cdot g(x)$

så er $f'(x) = k \cdot g'(x)$

Eks $k = 7$, $g(x) = x^2$. Da er $f(x) = 7x^2$

så $\quad f'(x) = 7 \cdot 2x = 14x$

Produktregelen $\quad$ Hvis $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

Da er $\quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Eks $f(x) = (5x^3 - 2x + 1) \cdot (3x + 7)$

Beregn $f'(x)$ ved å bruke produktregelen.

Løsning $\quad g(x) = 5x^3 - 2x + 1 \quad$ og $\quad h(x) = 3x + 7$

$g'(x) = 15x^2 - 2 \qquad h'(x) = 3$

$$f'(x) = (15x^2 - 2) \cdot (3x + 7) + (5x^3 - 2x + 1) \cdot (3)$$

husk parantesene!

regner $=$ $\underline{\underline{60x^3 + 105x^2 - 12x - 11}}$

Brøkregelen

Har $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$

Da er $f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

EKS $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x+5}$.

Setter $g(x) = 3x+1$ og $h(x) = 2x+5$

$g'(x) = 3$ $h'(x) = 2$

parantesene!

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (2x+5) - (3x+1) \cdot 2}{(2x+5)^2}$$

minus!

$$= \frac{3 \cdot 2x + 3 \cdot 5 - (3x \cdot 2 + 1 \cdot 2)}{(2x+5)^2}$$

husk denne!

$$= \frac{6x + 15 - 6x - 2}{(2x+5)^2}$$

$$= \frac{13}{(2x+5)^2}$$

vanligvis best å ikke regne ut nevneren!

Kjerneregelen

Hvis $f(x) = g(\underbrace{u(x)}_{\text{den indre funksjonen}})$

den ytre funksjonen $g(u)$

Da er

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$$

hvor $u = u(x)$

Eks $f(x) = (x^2+3)^{10}$

Setter $u = u(x) = x^2+3$ og $g(u) = u^{10}$

$u'(x) = 2x$ $\qquad g'(u) = 10u^9$

Da er $f'(x) = 10u^9 \cdot 2x = 10(x^2+3)^9 \cdot 2x$

$$= \underline{\underline{20x(x^2+3)^9}}$$

To funksjoner

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$g(x) = \ln(x)$

$g'(x) = \frac{1}{x}$

Eks $f(x) = e^{3x}$

$u(x) = 3x$ og $g(u) = e^u$

$u'(x) = 3$ $\qquad g'(u) = e^u$

så $f'(x) = \underline{\underline{3 \cdot e^{3x}}}$

Eks $f(x) = \ln(x^2+1)$

$u(x) = x^2+1$ og $g(u) = \ln(u)$

$u'(x) = 2x$ $\quad g'(u) = \frac{1}{u}$

så $f'(x) = \frac{1}{u} \cdot 2x$

$$= \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \underline{\underline{\frac{2x}{x^2+1}}}$$