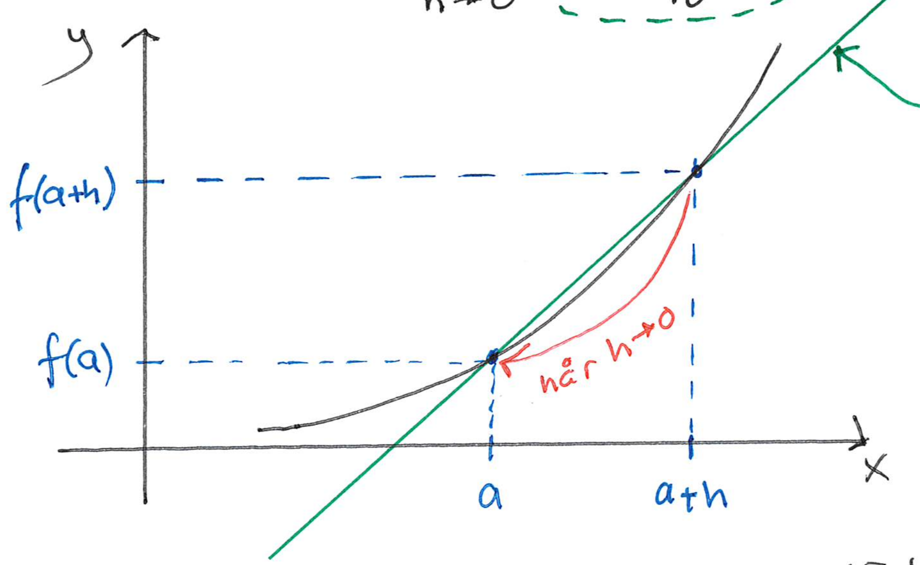
MET 1180, 17. forelesning, 24. okt. 2023, Runar Ile

Plan: Repetisjon av derivasjon
1. Definisjon, stigningstall og grafer
2. Den naturlige logaritmen
3. Derivasjonsregler

1. Rep. av definisjon, stigningstall og grafer

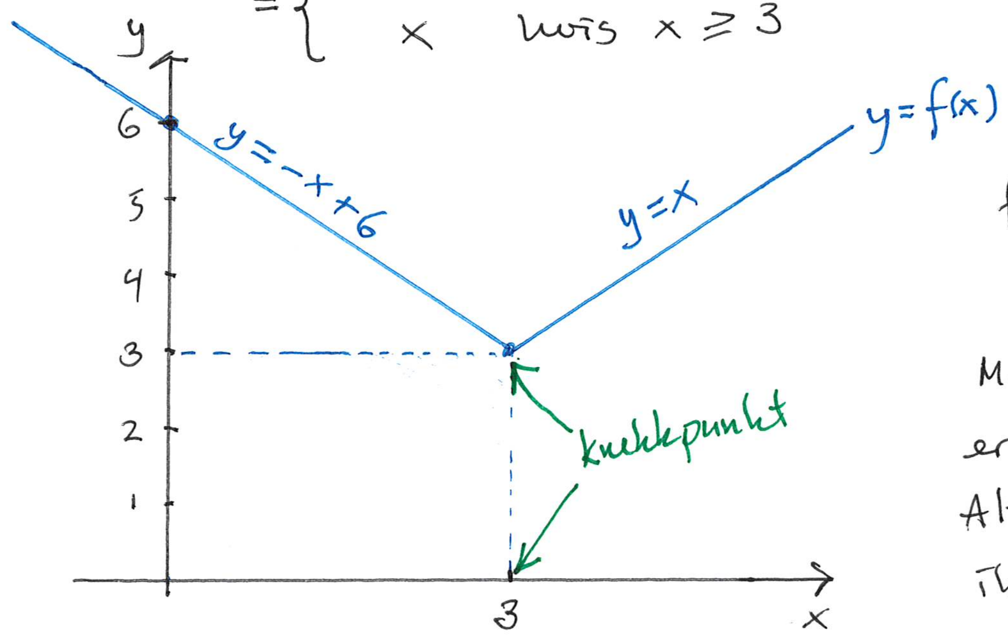
Definisjon $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ = stigningstallet til denne linjen



Merk Den deriverte finnes ikke alltid!

Eks $$f(x) = |x-3|+3 = \begin{cases} -(x-3)+3 & \text{hvis } x<3 \\ x-3+3 & \text{hvis } x \geq 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x+6 & \text{hvis } x<3 \\ x & \text{hvis } x \geq 3 \end{cases}$$

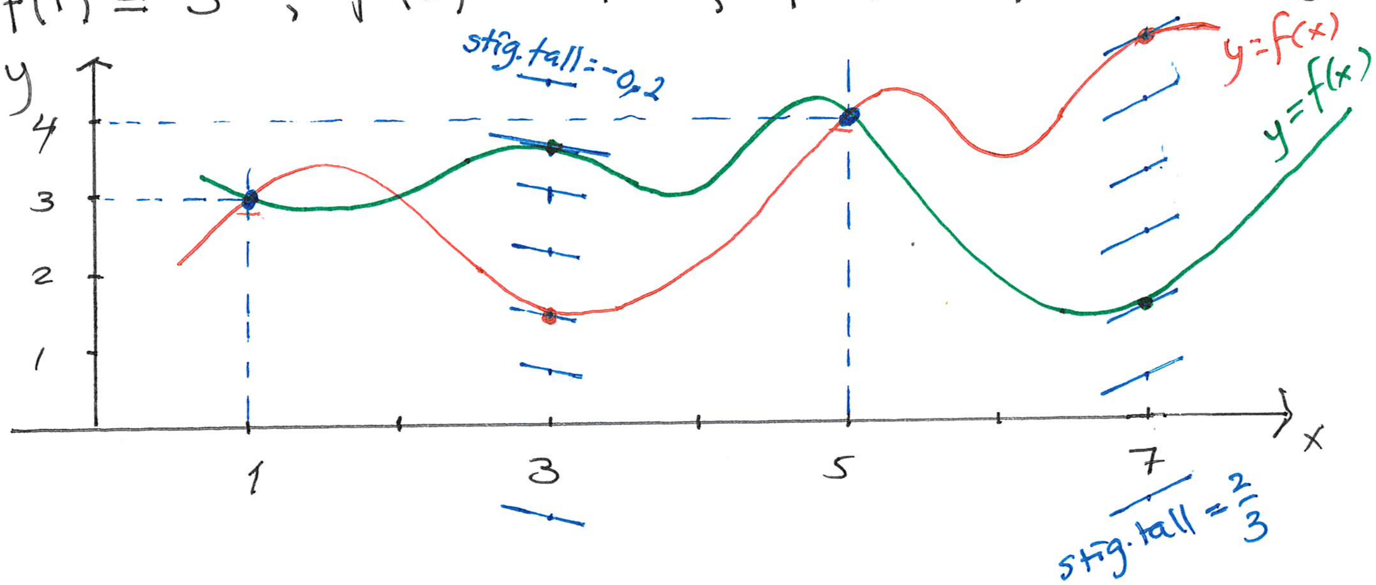


Her er $$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{hvis } x<3 \\ 1 & \text{hvis } x>3 \end{cases}$$

Men for $x = 3$ er det ingen tangent. Altså finnes ikke $f'(3)$.

Oppg 1d   Skissér to grafer.

$f(1) = 3$, $f'(3) = -0{,}2$, $f(5) = 4$, $f'(7) = \frac{2}{3}$



2. Den naturlige logaritmen

$\ln(x)$ er den omvendte funksjonen til e^x

så $\ln(e^x) = x$ og $e^{\ln(x)} = x$

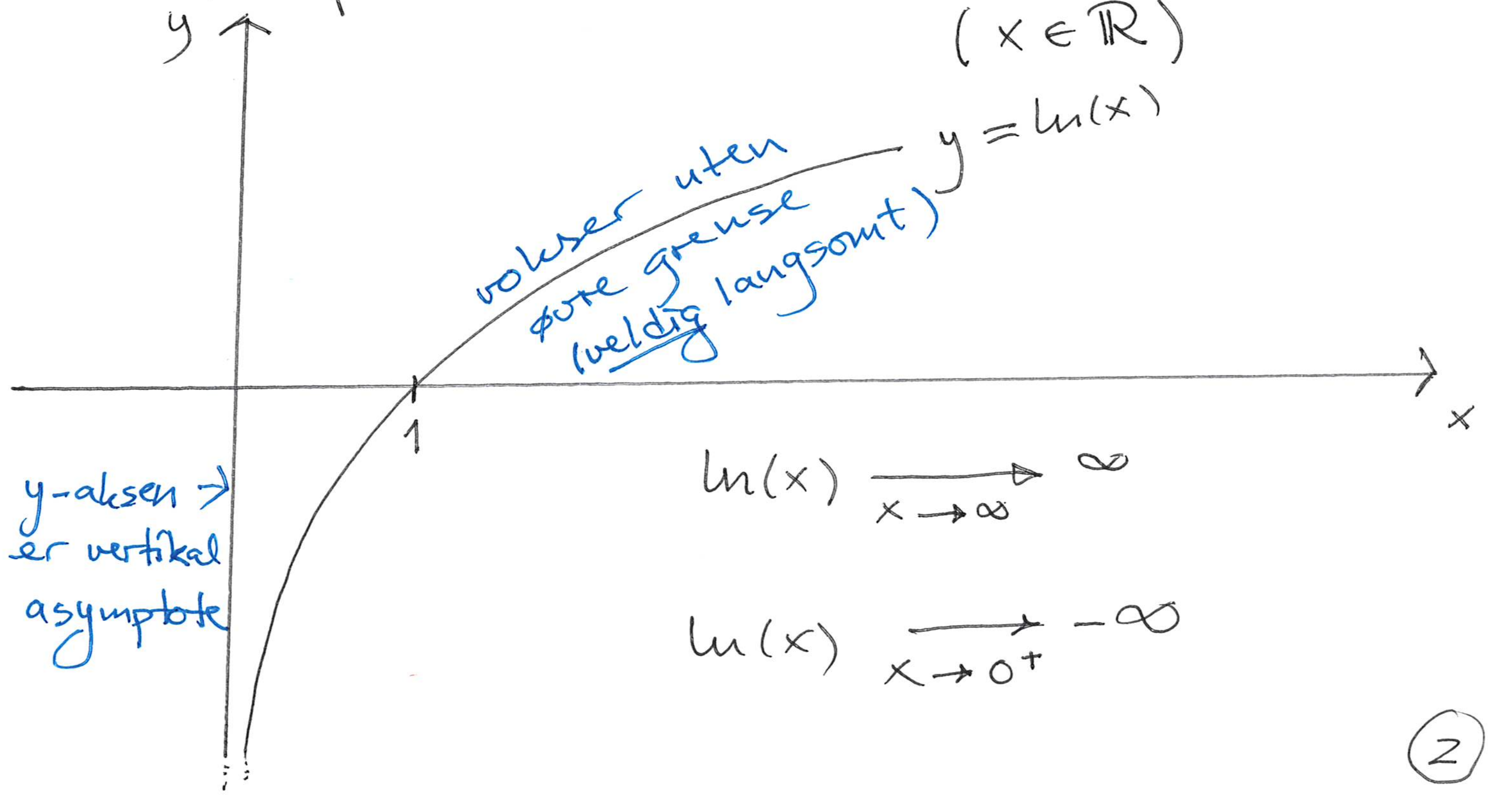
Definisjonsområdet til $\ln(x)$ er verdimengden til e^x : alle positive tall

$x > 0$

$x \in \langle 0, \rightarrow \rangle$

Verdimengden til $\ln(x)$ er definisjonsområdet til e^x : alle tall på tallinjen

$(x \in \mathbb{R})$



$\ln(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

$\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$

Eks $\ln\left(\sqrt[10]{e}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{10}}\right) = \frac{1}{10}\cdot\ln(e) = \frac{1}{10}\cdot 1$

$= \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$

$\ln(3e) = \ln(3) + \ln(e) = \underline{\underline{\ln(3) + 1}}$

$e^{2\ln(5)} = e^{\ln(5^2)} = 5^2 = \underline{\underline{25}}$

$\searrow (e^{\ln(5)})^2 = 5^2$

$e^{\ln(2)+\ln(3)} = e^{\ln(2\cdot 3)} = 2\cdot 3 = \underline{\underline{6}}$

Merk $\ln(2+3) \neq \ln(2) + \ln(3)$

$= \ln(5)$ $\qquad = 0{,}6931 + 1{,}0986$

$= 1{,}6094$ $\qquad = 1{,}7917$

Start: 15.02

Eks $\ln(5x) = \ln(5) + \ln(x)$

$\ln(x^{10}) = 10\cdot\ln(x)$

$\ln\left(\frac{3}{x-1}\right) = \ln(3) - \ln(x-1)$

3. Derivasjonsregler

$$[g(x)\cdot h(x)]' = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)$$

Eks $[(x^2+1)\cdot e^x]' = (x^2+1)'\cdot(e^x) + (x^2+1)\cdot(e^x)'$

$= 2x\cdot \underline{e^x} + (x^2+1)\underline{e^x}$ felles faktor

$= \underline{\underline{(x^2+2x+1)\cdot e^x}}$ null? $x=-1$

Eks $[\sqrt{x}\cdot \ln(x)]' = (x^{\frac{1}{2}})'\cdot \ln(x) + x^{\frac{1}{2}}\cdot[\ln(x)]'$

$= \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}\cdot \ln(x) + x^{\frac{1}{2}}\cdot \frac{1}{x}$ null?

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot \ln(x) + x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-1}$

$= \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{x^{1/2}}\cdot \ln(x) + x^{\frac{1}{2}-1}$

$= \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}}}$

null? $x = e^{-2}$

pos? $x > e^{-2}$

Brøkregelen

$$\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Eks $\left[\frac{x^2}{x-1}\right]' = \frac{2x\cdot(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{\underline{x}^2 - 2\underline{x}}{(x-1)^2}$ felles faktor

$= \underline{\underline{\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}}}$

pos? $x > 2$

eller $x < 0$

<u>Oppg</u> $\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \underline{\underline{\frac{1-\ln(x)}{x^2}}}$

null? $x=e$

pos? $0<x<e$

<u>Kjerneregelen</u> $\left[g(u(x))\right]' = g'(u)\cdot u'(x)$

hvor $u=u(x)$

<u>Eks</u> $\left[e^{x^2+3x}\right]' = e^u\cdot(2x+3) = (2x+3)\cdot e^{x^2+3x}$

$u=u(x)=x^2+3x$ og $g(u)=e^u$

$u'(x)=2x+3$ $\quad g'(u)=e^u$

null? $x=-\frac{3}{2}$

pos? $x>-\frac{3}{2}$

<u>Oppg</u> $\left[\ln(x^2+5)\right]' = \frac{1}{u}\cdot 2x = \underline{\underline{\frac{2x}{x^2+5}}}$

$u=u(x)=x^2+5$ og $g(u)=\ln(u)$

$u'(x)=2x$ $\quad g'(u)=\frac{1}{u}$

null? $x=0$

pos? $x>0$

<u>Eks</u> $\left[\ln\left(\frac{3x}{x-1}\right)\right]' = \left[\ln(3x)-\ln(x-1)\right]'$

$= \left[\ln(3)+\ln(x)-\ln(x-1)\right]'$

$u=x-1$ og $g(u)=\ln(u)$

$u'=1$ $\quad g'(u)=\frac{1}{u}$

$= 0 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$

$= \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \underline{\underline{\frac{-1}{x(x-1)}}}$

null? – aldri

oppgave 5, siste : $f(x) = \dfrac{2}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

Setter $u = u(x) = 2x+1$ og

$u'(x) = 2$

$g(u) = \dfrac{2}{u \cdot \sqrt{u}} = 2 \cdot u^{-\frac{3}{2}}$

$g'(u) = \cancel{2} \cdot \left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right) \cdot u^{-\frac{3}{2}-1}$

$= -3 \cdot u^{-2,5}$

$= \dfrac{-3}{u^2\sqrt{u}}$

$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

$= \dfrac{-3}{u^2\sqrt{u}} \cdot 2$

$= \dfrac{-6}{(2x+1)^2 \cdot \sqrt{2x+1}} = -6 \cdot (2x+1)^{-2,5}$