MET 1180, 19. forelesning, 31. okt. 2023, Runar Ile

Plan: 1. Repetisjon med oppgaver fra forrige uke.

- Oppg 1c: Tegn to grafer!
- Oppg 2 b, d, h, i, k: tolkninger av grafen til $f'(x)$.
- Oppg 3c: Hvilken graf er $f(x)$ / $f'(x)$?
- Oppg 4g: Voksende/avtagende fra $f'(x)$.

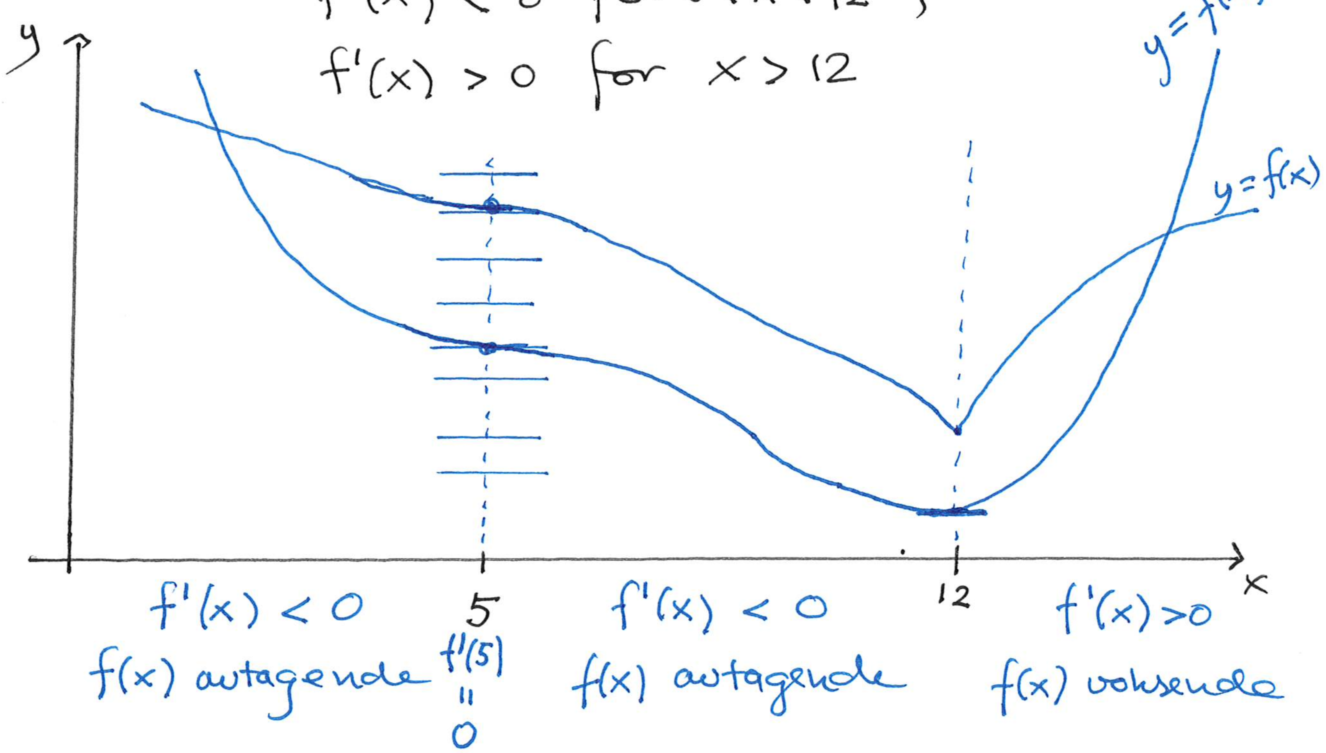
2. Implisitt derivasjon

Rep. Oppg 1c

$f'(x) < 0$ for $x < 5$, $f'(5) = 0$

$f'(x) < 0$ for $5 < x < 12$,

$f'(x) > 0$ for $x > 12$

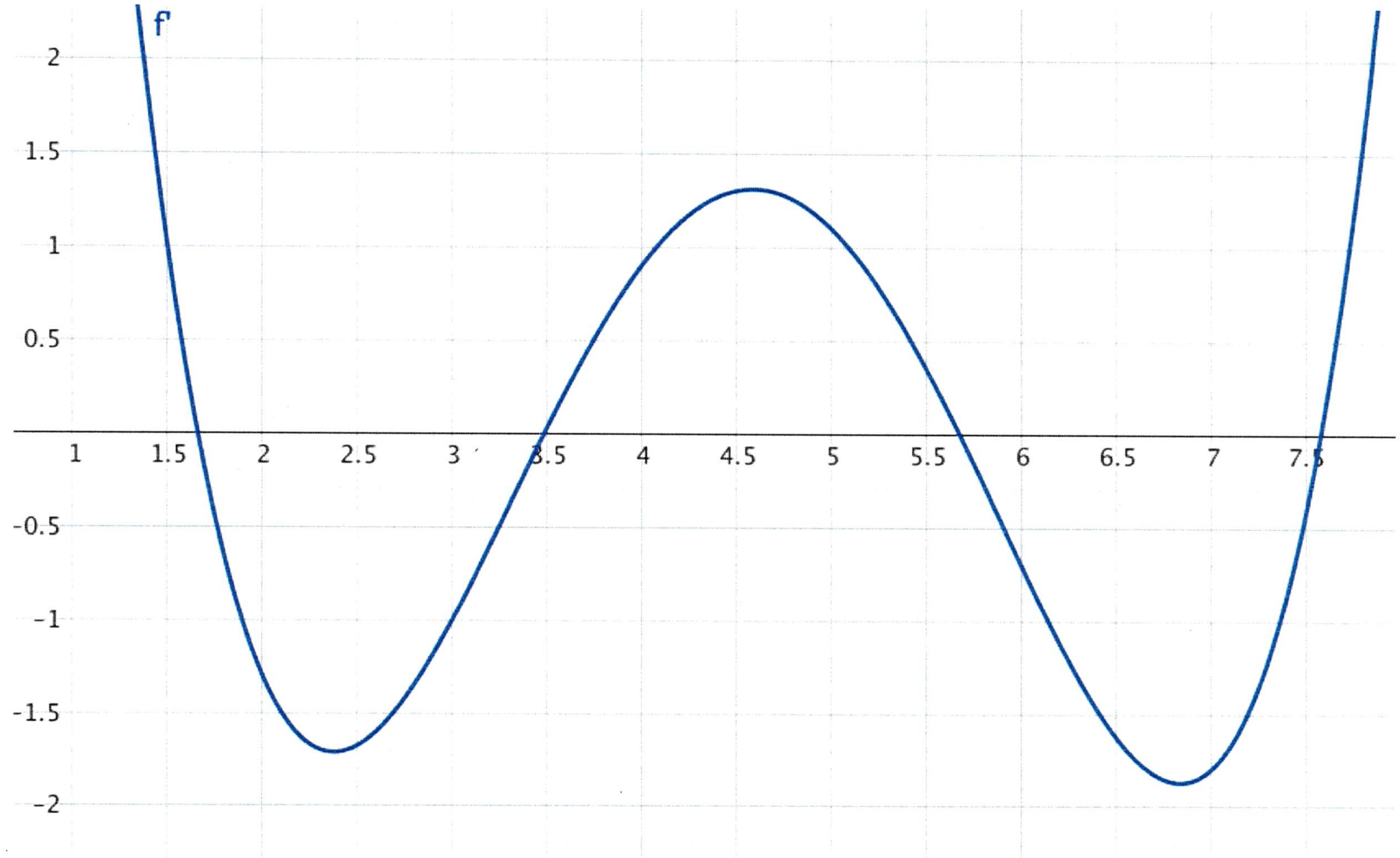


Oppg 2 b) $f(2) < f(3)$ GALT

Vi ser fra grafen til $f'(x)$ at $f'(x) < 0$ for $x \in [2, 3]$. Altså er $f(x)$ strengt avtagende for $x \in [2, 3]$, så

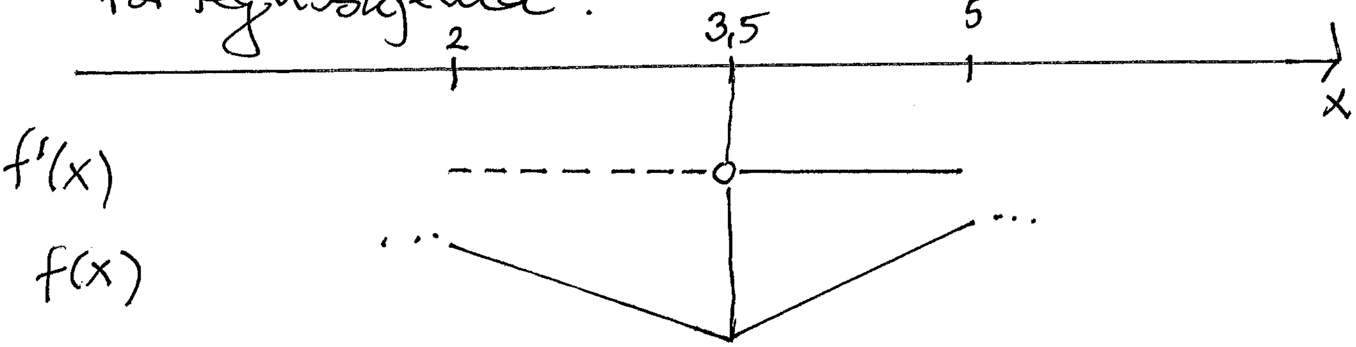
$f(2) > f(3)$.

Oppgave 2 I figur 1 ser du grafen til $f'(x)$.



Figur 1: Grafen til $f'(x)$

2d) $f(x)$ har et (lok.) minimum ved $x = 3{,}5$
SANT. Vi har at $f'(x) < 0$ for $x \in [2, 3{,}5\rangle$
og $f'(x) > 0$ for $x \in \langle 3{,}5 , 5]$ og $f'(3{,}5) = 0$.
Fortegnsskjema:

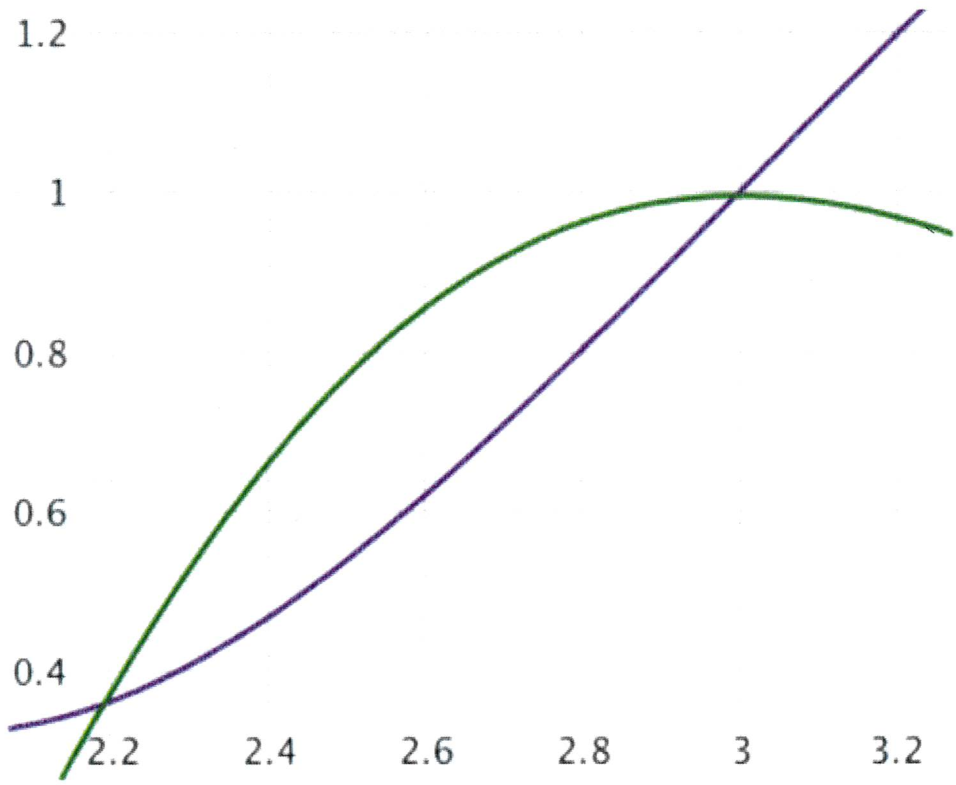


Konklusjon: $x = 3{,}5$ er et lok. minimumspunkt for $f(x)$.

2h) $f(x)$ vokser raskere ved $x = 1{,}5$ enn ved $x = 5{,}5$
SANT. Fordi: Stigningstallet til tangenten til $f(x)$ ved $x = 1{,}5$ er omtrent 1 ($f'(1{,}5) \approx 1$)
og stigningstallet til tangenten til $f(x)$ ved $x = 5{,}5$ er omtrent 0,35 ($f'(5{,}5) \approx 0{,}35$)
Grafen til $f(x)$ ligner på grafen til tangenten ved $x = 1{,}5$ når x er nær 1,5. Tilsv. for 5,5.

2i) Den deriverte til $f'(x)$ er positiv for $x = 7{,}6$.
SANT. – fordi stigningstallet til tangenten til $f'(x)$ ved $x = 7{,}6$ er (veldig) positiv
($f''(7{,}6) \approx 6$).

2k) Vi kan <u>ikke</u> bruke grafen til $f'(x)$ for å bestemme om $f(4{,}5)$ er positiv. SANT, fordi hvis vi legger til/trekker fra 1 mill. til $f(x)$ får vi samme $f'(x)$.


1.2
1
0.8
0.6
0.4
2.2
2.4
2.6
2.8
3
3.2

Oppg 3c Hvilken graf er $f(x)$ / $f'(x)$?

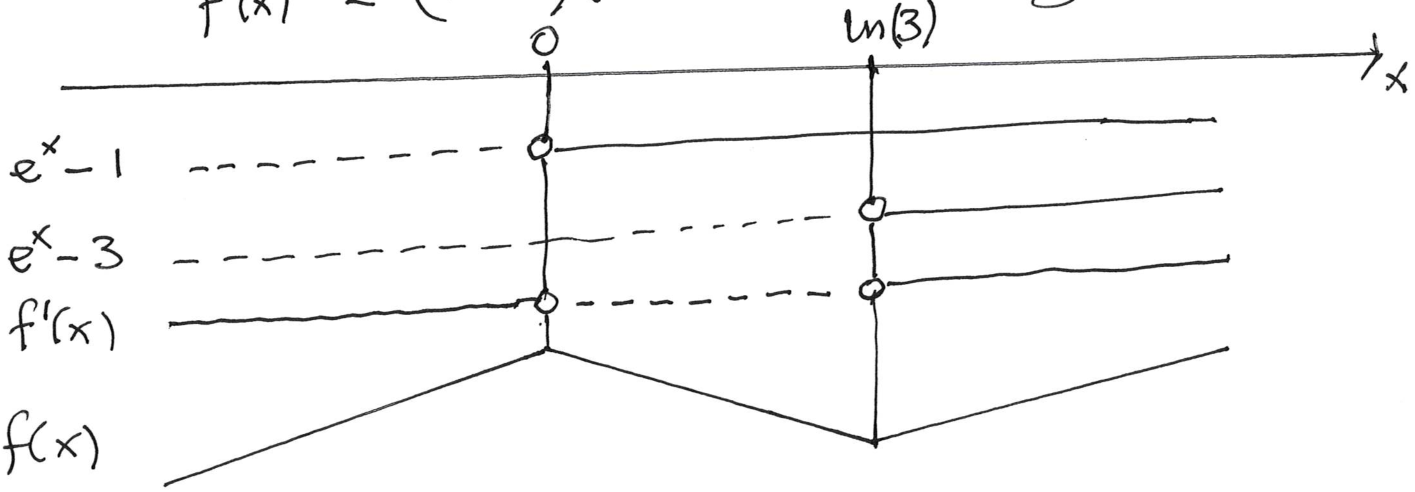
Jeg „gjetter" at $f(x)$ er den fiolette.
Men det er (mye!) lettere å vise hva som er galt. Antar derfor at $f(x)$ er den grønne.

Da er $f'(x)$ den fiolette. Men stigningstallene for tangentene til den grønne for $x > 3$ er negative (den grønne avtar her)
Samtidig (for $x > 3$) er funksjonsverdiene til den fiolette større enn 1. Dette er en motsigelse, så antagelsen er gal.
Dermed må $f(x)$ være den fiolette og $f'(x)$ den grønne (ingen andre alternativer)

Oppg 4g $f'(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 3$. Finn stasjonære punktene, avgjør hvor $f(x)$ er voksende/avtagende.
Vil bruke fortegnsskjema for $f'(x)$.
Setter $u = e^x$. Da er $u^2 = e^x \cdot e^x = e^{2x}$

Så $f'(x) = u^2 - 4u + 3 = (u-1)(u-3)$

$f'(x) = (e^x - 1)\cdot(e^x - 3)$. Fortegnsskjema:



Så $f(x)$ er strengt voksende for x i $\langle \leftarrow, 0]$

$f(x)$ —— " —— avtagende —— " —— $[0, \ln(3)]$

—— " —————— voksende —— " —— $[\ln(3), \rightarrow\rangle$

start 15.05

---

2. Implisitt derivasjon

Eks $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ så $f'(x) = (-1)\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

– vanlig derivasjon.

I stedet setter vi $y = f(x)$, dvs $y = \frac{1}{x}$ $\quad | \cdot x$

$$\boxed{xy = 1}$$

Vi tenker på y som en (ukjent) funksjon av x.

Deriverer begge sider av likningen m.h.p. x:

$$(x\cdot y)'_x = (1)'_x$$

$$(x)'_x \cdot y + x\cdot (y)'_x = 0$$

$$1\cdot y + x\cdot y' = 0$$

Vi kan løse denne likningen for y':

$$x\cdot y' = -y \qquad | : x$$

$$\boxed{y' = -\frac{y}{x}}$$

(Merk: $y = \frac{1}{x}$, så $y' = -\frac{(\frac{1}{x})}{x} = -\frac{1}{x^2}$)

Dette kalles for implisitt derivasjon.

En anvendelse Kan bruke implisitt derivasjon til å finne tangenter til kurven definert av likningen (blå boks: $xy = 1$)

F.eks. hvis $x = 2$ så gir $xy = 1$ at $2y = 1$

dvs $y = \frac{1}{2}$

Da er $y'\Big|_{\substack{x=2 \\ y=\frac{1}{2}}} \overset{\text{rød boks}}{=} -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{4}$

Kan bruke dette i ettpunktsformelen for å finne uttrykket $h(x)$ til tangentlinjen til kurven $xy = 1$ gjennom punktet $\left(2, \frac{1}{2}\right)$:

$$h(x) - \frac{1}{2} = \underbrace{-\frac{1}{4}}_{\text{stigningstallet}}(x - 2)$$

$$\underline{\underline{h(x) = -\frac{1}{4}\cdot x + 1}}$$