MET 1180, 20. forelesning, 2. nov. 2023, Runar Ile

Plan: 1. Implisitt derivasjon
2. Den andrederiverte og krumning
3. Konveks optimering

1. Implisitt derivasjon

Eks En kurve er implisitt definert ved likningen

$$\boxed{y^2 - x^3 = 1}$$

a) Uttrykk y' ved hjelp av y og x ved implisitt derivasjon.

b) Finn alle løsninger for y på likningen når $x=2$.

c) Beregn y' for disse punktene.

d) Finn funksjonsuttrykkene for tangentlinjene til kurven i disse punktene.

Løsning a) Vi tenker på y som en funksjon av x (selv om den ikke er det!) og deriverer likningen med hensyn på x:

Kjerneregelen for y^2: $u(x) = y$ og $g(u) = u^2$

$u'(x) = y'$ $\quad g'(u) = 2u$

Så $(y^2)'_x = 2u \cdot y' = 2y \cdot y'$

$2y \cdot y' - 3x^2 = 0$ – løser for y'

$2y \cdot y' = 3x^2 \quad | : 2y$

$$\boxed{y' = \frac{3x^2}{2y}}$$

b) $\underline{x=2}$ gir likningen $y^2 - 2^3 = 1$

dvs $y^2 = 1+8 = 9$

så $\underline{\underline{y = \pm 3}}$

dvs at $(2,-3)$ og $(2,3)$ er punkter på kurven.

c) $(2,3)$: $y' = \dfrac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot 3} = \underline{\underline{2}}$

$(2,-3)$: $y' = \dfrac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot (-3)} = \underline{\underline{-2}}$

d) Tangentlinjen til kurven i punktet $(2,3)$:

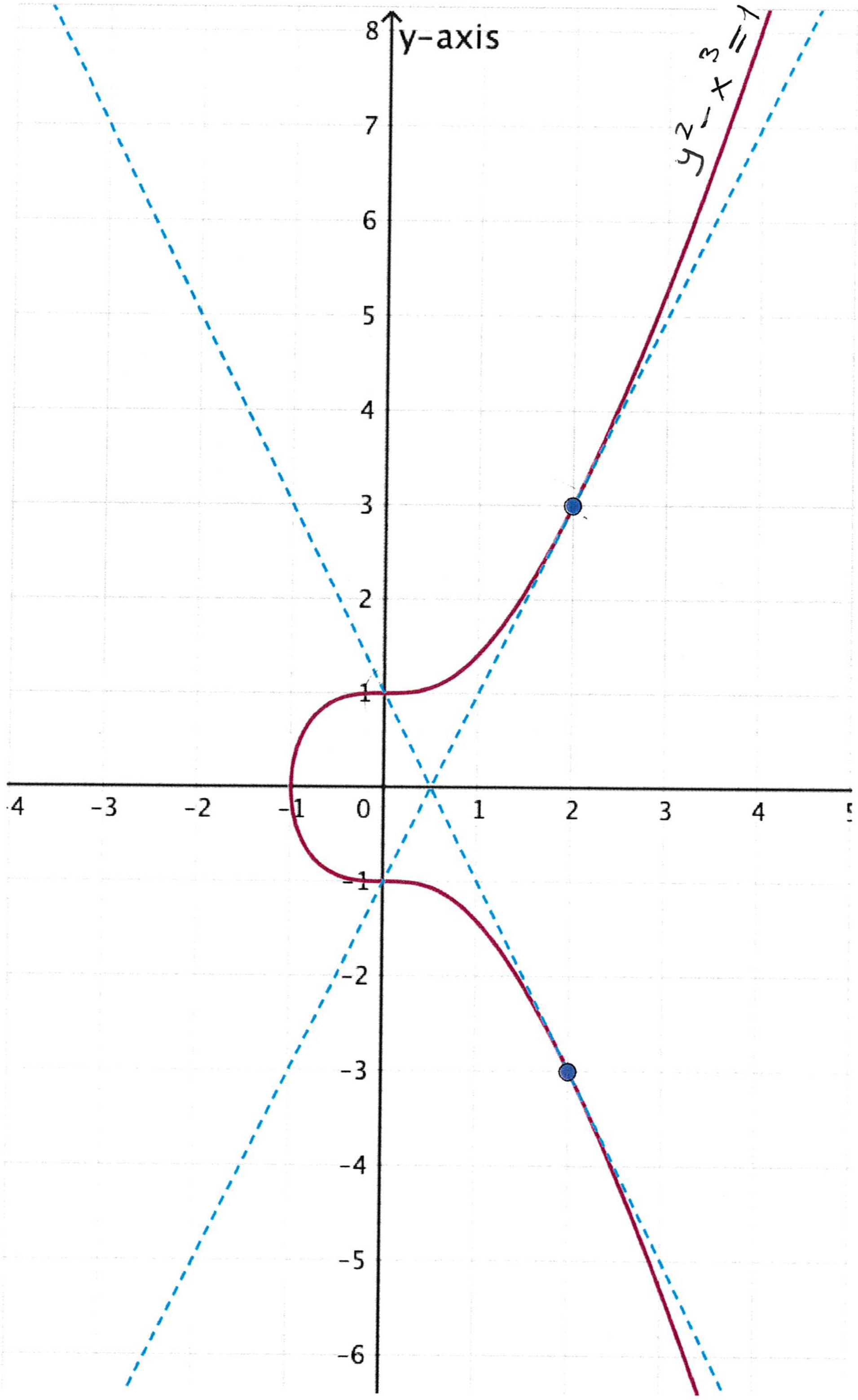
$h(x) - 3 = 2 \cdot (x-2)$

så $\underline{\underline{h(x) = 2x - 1}}$

Tangentlinjen til kurven i punktet $(2,-3)$:

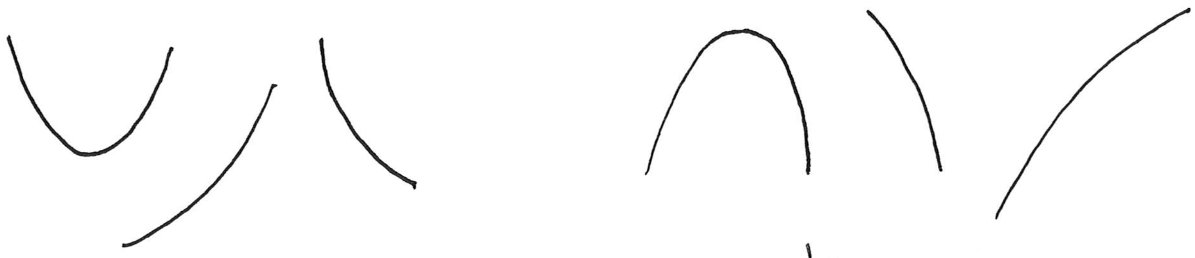
$g(x) - (-3) = -2(x-2)$

så $\underline{\underline{g(x) = -2x + 1}}$


y-axis
$y^2 - x^3 = 1$
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

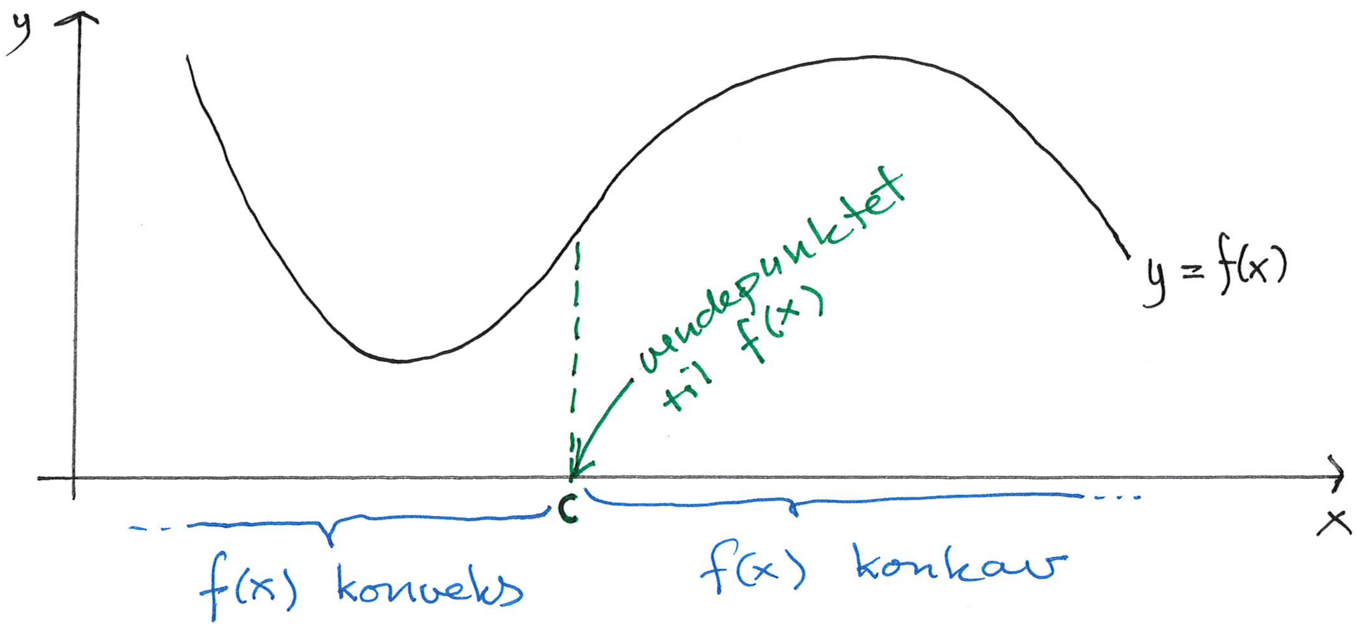
2. Den andrederiverte og krumning

Hvilken vei krummer funksjonen?



krummer opp
– konvekse funksjoner

krummer ned
– konkave funksjoner



Definisjon

- $f(x)$ er konveks på intervallet $[a, b]$ hvis $f''(x) \geq 0$ for alle x i $\langle a, b \rangle$
- $f(x)$ er konkav på intervallet $[a, b]$ hvis $f''(x) \leq 0$ for alle x i $\langle a, b \rangle$
- $x = c$ er et vendepunkt for $f(x)$ hvis $f''(x)$ skifter fortegn ved $x = c$.

Start: 9.01

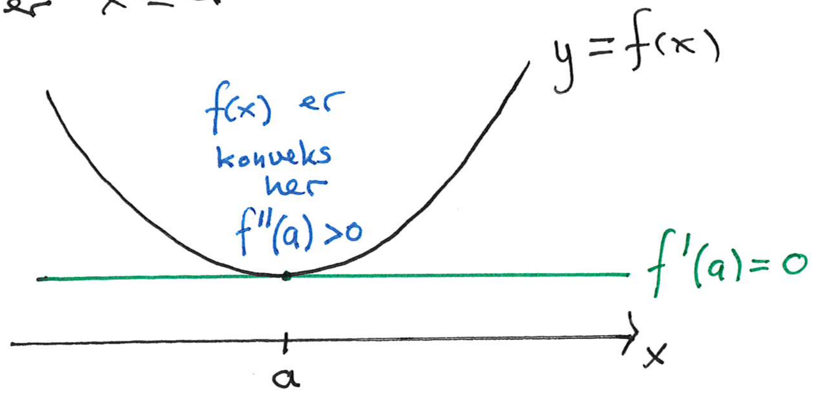
Merk • Hvis $f(x)$ er konveks så er $f'(x)$ en voksende funksjon

• Hvis $f(x)$ er konkav så er $f'(x)$ en avtagende funksjon

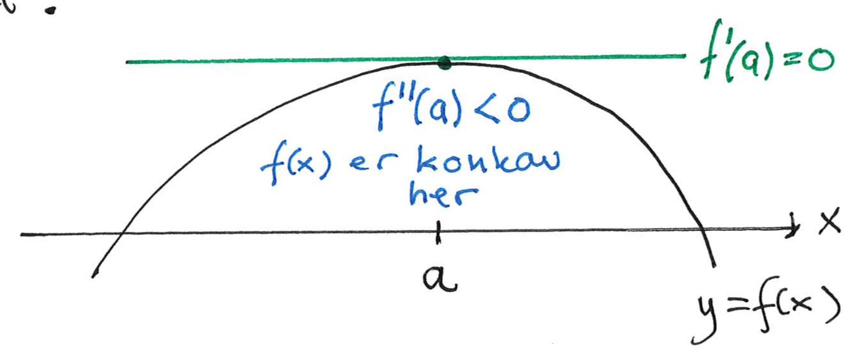
Andre derivert testen

Anta $x = a$ er et stasjonært punkt for $f(x)$.

Hvis $f''(a) > 0$ så er $x = a$ et (lokalt) minimumspunkt:



Hvis $f''(a) < 0$ så er $x = a$ et (lokalt) maksimumspunkt:



Eks $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

Finn lokale maks/min. punkter ved å bruke andre derivert testen.

Løsning Planen er
(1) Finne de stasjonære punktene til $f(x)$, dvs løse likningen $f'(x) = 0$

(2) Sette disse x-verdiene inn i $f''(x)$ og sjekker fortegn.

(1) $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Løser likningen

$$3x^2 - 6x = 0 \quad | \; 3x \text{ felles faktor}$$

$$3x(x-2) = 0$$

dvs $\underline{x = 0}$ el. $\underline{x = 2}$ er de stasjonære punktene til $f(x)$.

(2) $f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$

Setter inn de stasjonære punktene:

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$$

Dvs $\underline{\underline{x = 0 \text{ er et (lok.) maksimumspunkt}}}$

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$$

Dvs $\underline{\underline{x = 2 \text{ er et (lok.) minimumspunkt}}}$

3. Konveks optimering

Fakta

- Hvis $f(x)$ er konveks i $D_f = [a, b]$ vil ethvert stasjonært punkt være et globalt minimumspunkt
- Hvis $f(x)$ er konkav i $D_f = [a, b]$ vil ethvert stasjonært punkt være et globalt maksimumspunkt.

Eks $f(x) = x^4 + 5x^2 + 3$, $D_f = \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle = \mathbb{R}$.

a) Finn de stasjonære punktene til $f(x)$

b) Bruk konveks optimering for å avgjøre om de er globale maks/min. punkter

c) Bestem (evt.) globale maks. og min. verdier.

Løsning

a) Beregner $f'(x) = 4x^3 + 10x$.

Løser likn. $f'(x) = 0$ dvs

$$4x^3 + 10x = 0$$
$$x(4x^2 + 10) = 0$$

Så enten $\underline{\underline{x = 0}}$ eller $4x^2 + 10 = 0$ som ikke har løsninger.

b) Beregner $f''(x) = 12x^2 + 10$ som er positiv for alle x.

Da er $f(x)$ konveks for hele tallinjen og $x = 0$ er et (eneste!) globalt minimumspunkt.

Ingen globale maks. punkter

c) $f(0) = 0^4 + 5 \cdot 0^2 + 3 = \underline{3}$ er den globale minimumsverdien til $f(x)$.