MET 1180, 22. forelesning, 9. Nov. 2023, Runar Ile

Plan: 1. Grensekostnad og grenseinntekt
2. Kostnadsfunksjoner, kostnadsoptimum og optimal enhetskostnad.

## 1. Grensekostnad, grenseinntekt, osv.

Intro: Diamanter og vann

Eks Kostnaden ved å fjerne x % av forurensningen i en innsjø.

$K(x)$ er kostnaden ved å produsere x enheter (av en vare)

$K'(x)$ er grensekostnaden ved x (marginal kostnad)

Tolkning Hva koster det å produsere én enhet mer enn x enheter?

$$= K(x+1) - K(x) = \frac{K(x+1)-K(x)}{1} \approx \lim_{h\to 0} \frac{K(x+h)-K(x)}{h} = K'(x)$$

Hvorfor $K'(x)$? – mye enklere matematikk.

$I(x)$ er inntekten av å selge x enheter

$I'(x)$ er grenseinntekten ——— " ———

Eks x = antall tonn laks solgt

$I'(50)$ = ekstra inntekt ved å selge ett tonn mer enn 50 tonn.

– fordi $I'(50) \approx I(51) - I(50)$

Profittfunksjonen ( $x$ = ant. prod. og solgte enheter)

$$P(x) = I(x) - K(x)$$ (ofte $\Pi(x)$ )

$P'(x)$ er grenseprofitten ved $x$

$$P'(x) = I'(x) - K'(x)$$

---

## 2. Kostnadsfunksjoner, kostnadsoptimum og optimal enhetskostnad

---

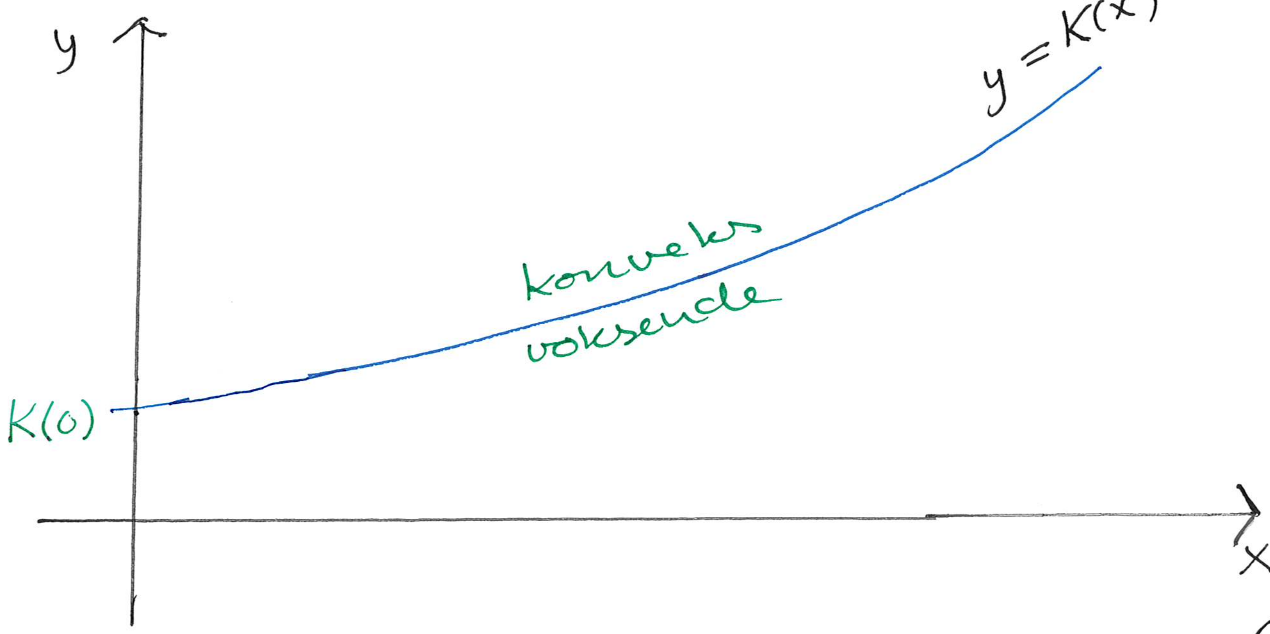
Den gjennomsnittlige enhetskostnaden ved å produsere $x$ enheter er

$$A(x) = \frac{K(x)}{x}$$ – ikke en konstant funksjon!

"average unit cost"

<u>Definisjon</u> $K(x)$ er en kostnadsfunksjon hvis

1. $K(0) > 0$ (startkostnader)
2. $K(x)$ er voksende ( $K'(x) \geq 0$ )
3. $K(x)$ er konveks ( $K''(x) \geq 0$ )



Definisjon Hvis $x = c$ er minimumspunktet for $A(x)$, kalles $c$ for kostnadsoptimum.

– dvs x-verdien som gir lavest gjennomsnittlig enhetskostnad

Resultat: Hvis $K(x)$ er er en kostnadsfunksjon med $K''(x) > 0$ for alle $x > 0$, så er kostnadsoptimum løsningen på likningen

$$K'(x) = A(x)$$

Eks $K(x) = x^2 + 200x + 160\,000$

Dette er en kostnadsfunksjon fordi:

1. $K(0) = 160\,000 > 0$
2. $K'(x) = 2x + 200 > 0$ for $x \geq 0$
3. $K''(x) = 2 > 0$ for alle $x$

så $K(x)$ er strengt konveks.

Ved resultatet er kostnadsoptimum løsn. på likn.

$$2x + 200 = \frac{x^2 + 200x + 160\,000}{x}$$

dvs $\cancel{2}x + \cancel{200} = \cancel{x} + \cancel{200} + \frac{160\,000}{x}$

$$x = \frac{160\,000}{x} \quad | \cdot x$$

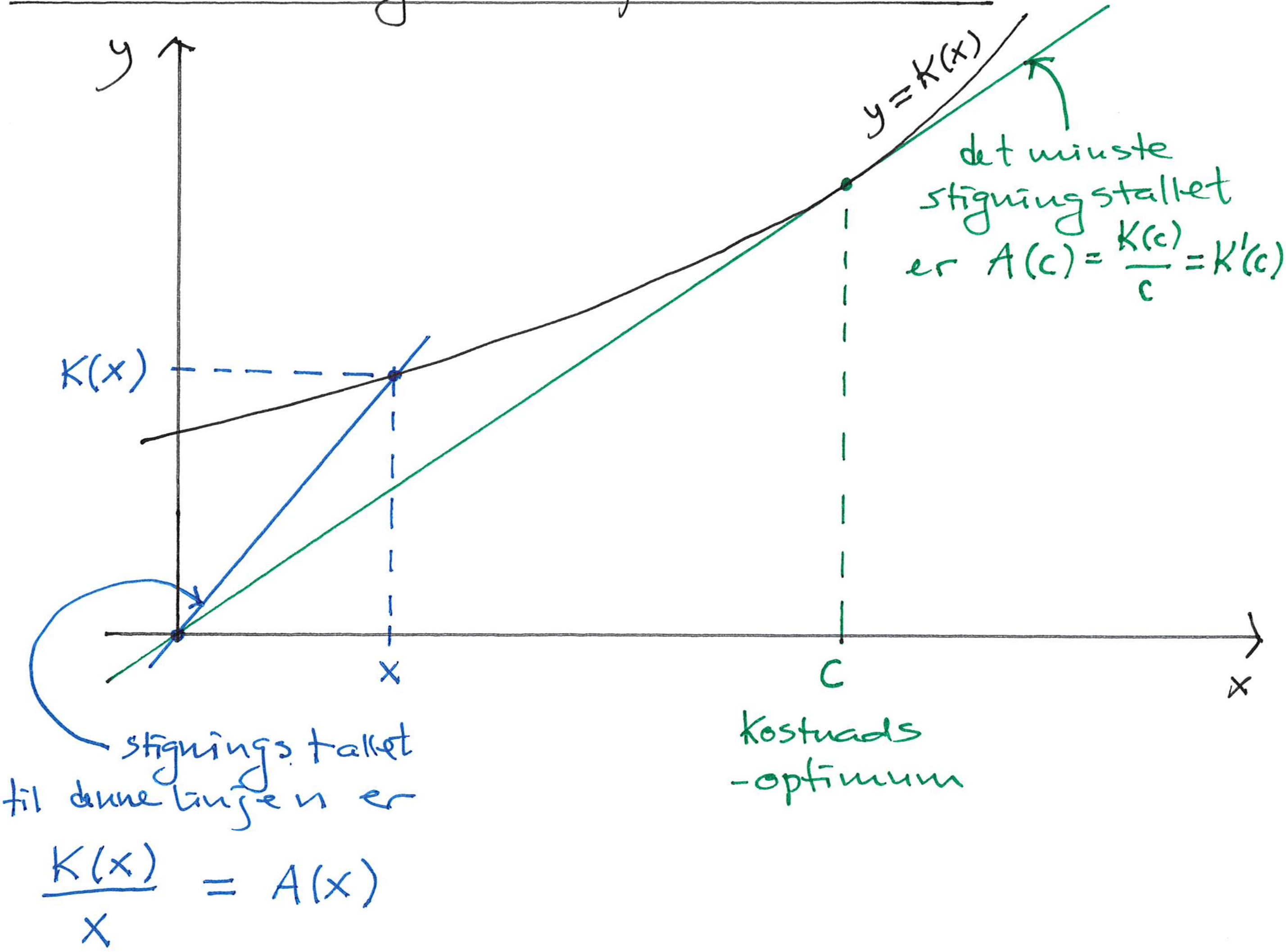
så $x^2 = 160\,000$ dvs $\underline{\underline{x = 400}}$ er kostnadsoptimum.

Start 9.10

Minimal gjennomsnittlig enhetskostnad er

$A(400) = K'(400) = 2 \cdot 400 + 200 = \underline{\underline{1000}}$

## Geometrisk argument for resultatet




Så $A(c) = \frac{K(c)}{c}$ er minimal enhetskostnad

når $K'(c) = A(c)$ = det minste stigningstallet til linjen gjennom origo og et punkt på grafen = stigningstallet til tangenten som går gjennom origo.

## Algebraisk begrunnelse for resultatet

„Finner" det stasjonære punktet til $A(x) = \dfrac{K(x)}{x}$.

Beregner

$$A'(x) = \left[\frac{K(x)}{x}\right]' \overset{\text{brøkregelen}}{=} \frac{K'(x)\cdot x - K(x)\cdot 1}{x^2} \qquad \Big|\ \frac{:x}{:x}$$

$$= \frac{K'(x) - A(x)}{x}$$

Så $A'(x) = 0$ er ekvivalent med at

$$K'(x) = A(x).$$

Anta $x = c$ er et slikt stasjonært punkt, (så $K'(c) = A(c)$)

dvs $A'(c) = 0$

Er dette (lok). maks, min. eller terrassepunkt ??

Bruker andrederivert-testen:

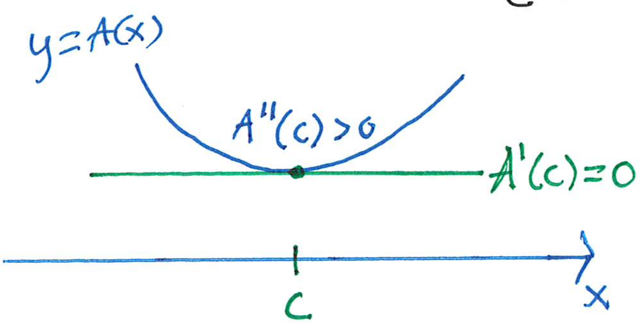
Regner $A''(x) = \dfrac{[K'(x) - A(x)]'\cdot x - [K'(x) - A(x)]\cdot 1}{x^2}$

$$= \frac{[K''(x) - A'(x)]\cdot x - [K'(x) - A(x)]}{x^2}$$

Substituerer $x = c$:

$$A''(c) = \frac{[K''(c) - \overbrace{A'(c)}^{=0}]\cdot c - \overbrace{[K'(c) - A(c)]}^{=0}}{c^2}$$

$$= \frac{K''(c)\cdot \cancel{c}}{c^{\cancel{2}}} = \frac{K''(c)}{c} > 0 \ (\text{for } c > 0)$$




Så $x = c$ (løsningen på likn. $K'(x) = A(x)$) er et (lok.) minimumspunkt.