MET 1180, 24. forelesning, 16. nov. 2023, Runar Ile

Plan. 1. Repetisjon: Elastisitet
2. Lineær approksimasjon
3. Høyere grads Taylorpolynomer
4. Om eksamen
5. Hvordan forberede seg til eksamen

1. Rep: Elastisitet

p = pris/enhet, $D(p)$ er etterspørselsfunksjonen.

Eks $D(p) = 200 \cdot e^{-0.01p}$

Beregner $\varepsilon(p)$ – elastisitetsfunksjonen

$$D'(p) \overset{\text{kjerne-regel}}{=} -0.01 \cdot 200 \cdot e^{-0.01p} = -2e^{-0.01p}$$

så $$\varepsilon(p) = \frac{D'(p)\cdot p}{D(p)} = \frac{-2\cdot \cancel{e^{-0.01p}} \cdot p}{200 \cdot \cancel{e^{-0.01p}}} = \underline{\underline{-0.01p}}$$

Etterspørselen er elastisk m.h.p. prisen hvis

$\varepsilon(p) < -1$ dvs $-0.01p < -1 \quad | \cdot (-100)$

$$\underline{\underline{p > 100}}$$

Betydning: Hvis $p > 100$ så vil en liten økning i prisen gi lavere inntekt.

F.eks. $\varepsilon(110) = -0.01 \cdot 110 = -1{,}1$, dvs at en prisøkning på 1 % fra 110 gir et etterspørselsfall på 1,1 %.

Etterspørselen er uelastisk m.h.p. prisen

hvis $\varepsilon(p) > -1$, dvs $-0{,}01p > -1$

så $\underline{\underline{p < 100}}$

Betydning: Hvis $p < 100$ vil en liten økning i prisen gi høyere inntekt.

F.eks. $\varepsilon(80) = -0.01 \cdot 80 = -0{,}8$, så 1% prisøkning fra 80 gir 0,8% etterspørsels-fall.

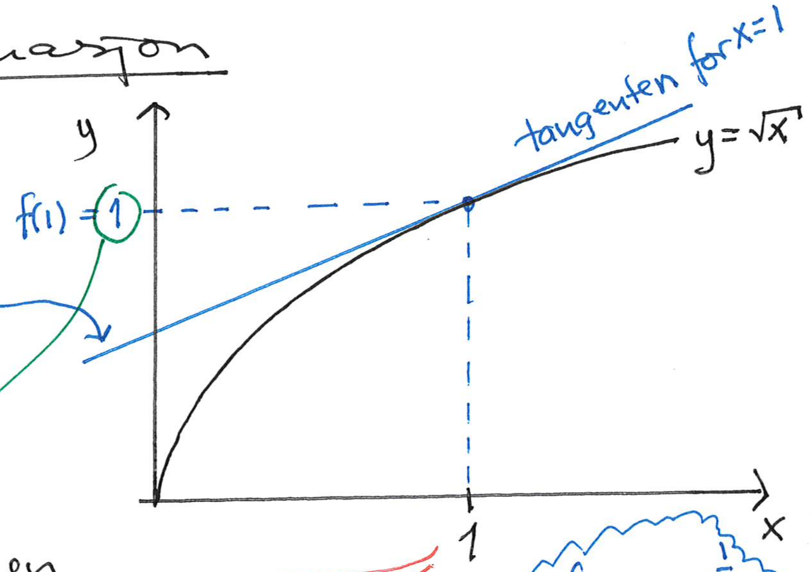
Hvis $\varepsilon(p) = -1$ (så $p = 100$), er etterspørselen nøytralelastisk m.h.p. prisen

Betydning: Ingen (eller veldig liten) endring i inntekt hvis prisen endres litt.

---

2. Lineær approksimasjon

Eks $f(x) = \sqrt{x}$



Den lineære approksimasjonen til $f(x)$ ved $x = 1$

Vi kan finne uttrykket for tangentfunksjonen ved ettpunktsformelen

$$y - 1 = f'(1) \cdot (x - 1)$$

så $y - 1 = \frac{1}{2}(x-1)$

dvs $y = \underbrace{\overset{=f(1)}{1} + \overset{=f'(1)}{\frac{1}{2}}(x-1)} = P_1(x)$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}$

$= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

– kalles Taylorpolynomet av grad 1 ved $x = 1$

F.eks. $P_1(1{,}1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (1{,}1 - 1) = 1{,}05$

(sjekk: $\sqrt{1{,}1} = 1{,}04881\ldots$)

3. Taylorpolynomer av høyere grad

Eks $f(x) = \sqrt{x}$. Da er Taylorpolynomet av grad 2 til $\sqrt{x}$ ved $x=1$ gitt som

$$P_2(x) = \underbrace{f(1) + f'(1)\cdot(x-1)}_{P_1(x)} + \frac{f''(1)}{2}\cdot(x-1)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{-1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f''(1) = \frac{-1}{4\cdot1\cdot\sqrt{1}} = -\frac{1}{4}$$

Mønster

$$\boxed{P_2(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2}$$

I eks. er $a = 1$

$$\sqrt{2} = f(2) \approx P_2(2) = 1 + \frac{1}{2}(2-1) - \frac{1}{8}(2-1)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 1{,}375$$

Start: 9.01

(sjekk: $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$)

$$P_2(1{,}2) = 1 + \frac{1}{2}\cdot(1{,}2-1) - \frac{1}{8}(1{,}2-1)^2$$

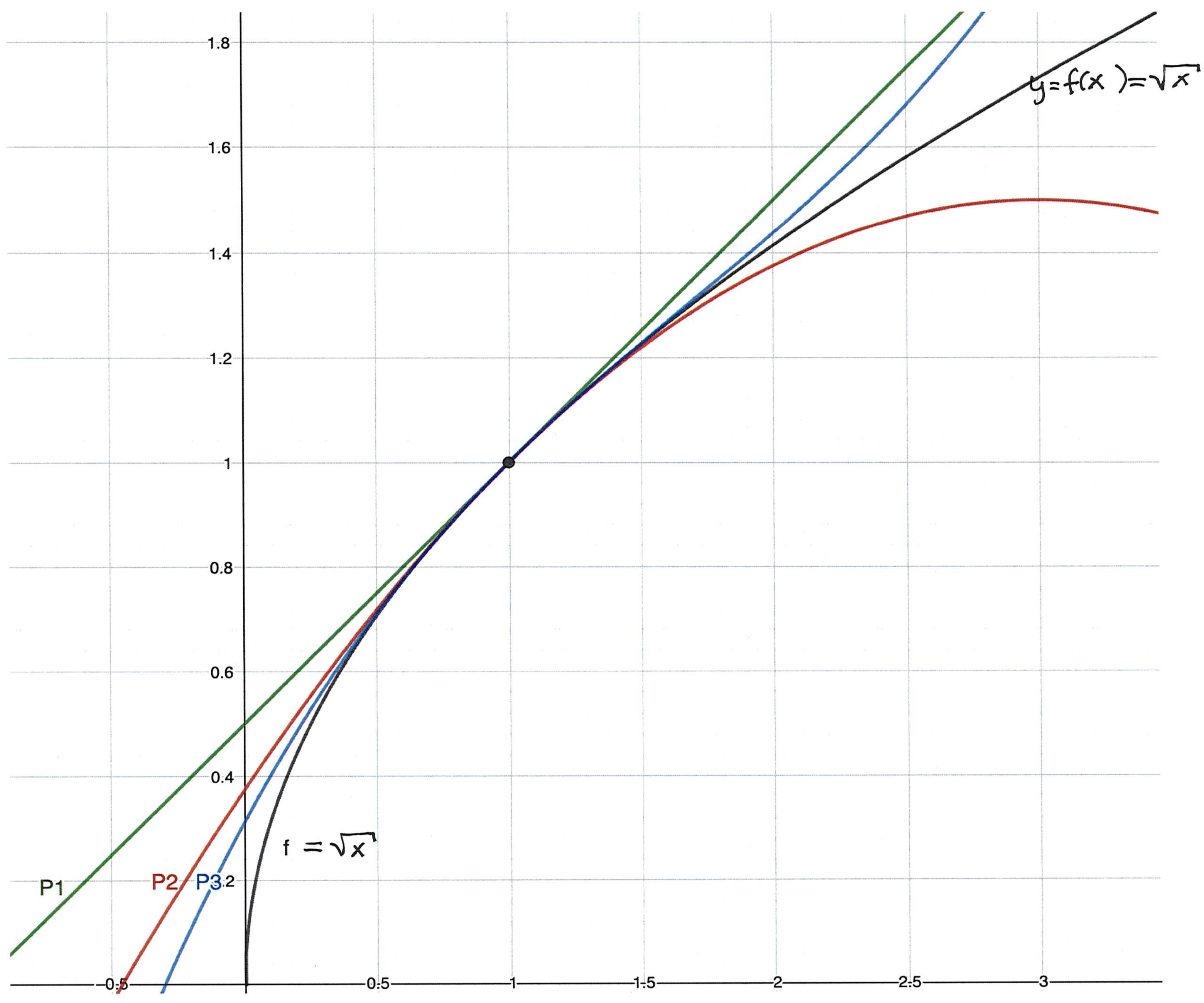
$$= 1 + 0{,}1 - 0{,}005 = 1{,}0950$$

(sjekk: $\sqrt{1{,}2} = 1{,}0954\ldots$) – mye bedre tilnærming enn for $x=2$.

Eks $f(x) = \sqrt{x}$ ved $x = 1$

Da er Taylorpolynomet til $f(x)$ av grad 3 ved $x=1$ er

$$P_3(x) = \underbrace{P_2(x)}_{\text{har alt gjort denne!}} + \frac{f'''(1)}{6}\cdot(x-1)^3$$



y=f(x)=√x
f = √x
P1
P2
P3
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 \qquad \frac{1}{16} = \frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{6}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$$

$$f'''(1) = \frac{3}{8\cdot 1^2\cdot\sqrt{1}} = \frac{3}{8}$$

$$P_3(1{,}2) = 1 + \frac{1}{2}(1{,}2-1) - \frac{1}{8}(1{,}2-1)^2 + \frac{1}{16}(1{,}2-1)^3$$

$$= 1{,}0955$$

Mønster (Taylorpolynomet av grad 3 til $f(x)$ ved $x=a$)

$$P_3(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}_{P_2(x)} + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$$

Taylorpolynomet av grad n for $f(x)$ ved $x=a$:

$$\boxed{P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ \text{hvor } n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

4. Om eksamen

- 12 oppg med lik vekt
  (noen har underpunkter i, ii, iii)
- 3 timer (kl 14-17), finn ut hvor!
- Du skriver svarene på papir!
  (gjennomslagsark: kryss ut, ikke viske!)
- Jeg sensurer
- Tips: Skriv bare én oppg. pr. side
- Alle oppgavene bør være (veldig) gjenkjennelige fra veiledningsoppg. og forelesningene
- Mange grunnleggende og sentrale temaer.
- Oppgavene er ikke ordnet etter semesterplan.
- Hjelpemidler på eksamen: BI-kalkulator og linjal.
- Eksamen teller 40% av endelig karakter.

5. Hvordan forberede seg

1. Relevant stoff:
   - forelesningsnotater
   - veiledningsoppgaver
   - tidligere flervalgseksamener
   - også læreboka.

② Mitt beste tips

Prøv å gjøre oppgavene i hodet!

- hva er planen (i detalj)?
- hva slags kunnskap kreves?
- hva slags problemer kan oppstå?

③ Hvis jeg får galt svar.

- hva har gått galt? - planen?
  - utførelsen?

④ Når du har løst en oppg.

- hva har du lært?

⑤ Lær de grunnleggende tingene veldig godt!

- definisjoner, begreper (ordene)

⑥ De enkle (grunnleggende) oppg. er de viktigste!

Eks $e^x = 5$ og $\ln(x+3) = 2$