MET 1180, forelesning 26, 11. jan. 2024, Runar Ile

Plan
1. Repetisjon
2. Delvis integrasjon
3. Integrasjon ved substitusjon

1. Repetisjon

Det ubestemte integralet $\int f(x)\,dx$ er mengden av anti-deriverte til $f(x)$, dvs alle funksjoner $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$.

To anti-deriverte $F_1(x)$ og $F_2(x)$ skiller seg bare fra hverandre med en konstant.

Eks $f(x) = x^2$. Da er $\int f(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

C er en ubestemt konstant

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \underline{\underline{\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + C}}$$
$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C}}$$

Eks $\int e^{3x}\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}e^{3x} + C}}$

Eks $\int \frac{5}{x}\,dx = 5\cdot\int \frac{1}{x}\,dx = \underline{\underline{5\ln|x| + C}} = \begin{cases} 5\ln(-x) + C_1, & x<0 \\ 5\ln(x) + C_2, & x>0 \end{cases}$

Så $5\ln(-x) + 3$ er en anti-derivert til $f(x) = \frac{5}{x}$ $(x<0)$.

Eks $\int \frac{x^2 + 2x + 5}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)^2 + 4}{x+1}\,dx$

$$= \int \frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+1)}} + \frac{4}{(x+1)}\,dx = \int x+1\,dx + \int \frac{4}{x+1}\,dx$$
$$= \int x\,dx + \int 1\,dx + \int \frac{4}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + 4 \cdot \ln|x+1| + C$$

2. Delvis integrasjon

Produktregelen for derivasjon : $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Anti-derivasjon : $u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) v(x)\,dx + \underbrace{\int u(x) \cdot v'(x)\,dx}_{\text{vil ha dette alene på VS.}}$

$$(*) \quad \boxed{\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) v(x)\,dx}$$

Eks Beregn $\int x \cdot e^x\,dx$

Løsning Setter $u(x) = x$ og $v'(x) = e^x$

får $u'(x) = 1$ $\quad v(x) = e^x$

Ved delvis integrasjon $(*)$ er

$$\int \overset{u}{x} \cdot \overset{v'}{e^x}\,dx = \overset{u \cdot v}{x e^x} - \int \overset{u' \cdot v}{1 \cdot e^x}\,dx = x e^x - e^x + C$$

$$= (x-1)e^x + C$$

Sjekk $[xe^x - e^x + C]' = [xe^x]' - [e^x]' + [C]'$

$$= \underbrace{\cancel{1 \cdot e^x} + x \cdot e^x}_{\text{produktregelen}} - \cancel{e^x} + 0 = x \cdot e^x \quad \text{- ok}$$

Eks Beregn $\int \ln(x) \cdot 2x \, dx$

Løsning Prøver med

Setter $u(x) = \ln(x)$ og $v'(x) = 2x$

får $u'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad v(x) = x^2$

Ved delvis integrasjon er

$$\int \overset{u}{\ln(x)} \cdot \overset{v'}{2x} \, dx = \overset{u}{\ln(x)} \cdot \overset{v}{x^2} - \int \overset{u'}{\frac{1}{\cancel{x}}} \cdot \overset{v}{x^{\cancel{2}}} \, dx$$

$$= \ln(x) \cdot x^2 - \int x \, dx$$

$$= \underline{\underline{\ln(x) \cdot x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C}}$$

Moral Det nye integralet (på høyresiden) skal være enklere enn det opprinnelige.

11.00

Oppg Beregn

a) $\int \ln(x) \cdot x^2 \, dx$

Løsning: Prøver

$u(x) = \ln(x)$ og $v'(x) = x^2$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad v(x) = \frac{1}{3}x^3$

$$\overset{\text{delvis int.}}{=} \ln(x) \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{1}{3}x^{\cancel{3}\,2} \, dx$$

$$= \ln(x) \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}x^3 \left[\ln(x) - \frac{1}{3} \right] + C}}$$

b) $\int \overset{u}{x^2} \cdot \overset{v'}{e^x}\, dx$

<u>Løsning</u>: Prøver $u = x^2$ og $v' = e^x$

$u' = 2x \qquad v = e^x$

delvis int.

$= \overset{u \cdot v}{x^2 e^x} - \int \overset{u' \cdot v}{2x e^x}\, dx$

Ny delvis int.: $\int \overset{u}{2x}\, \overset{v'}{e^x}\, dx = 2x \cdot e^x - \int 2 e^x\, dx$

$= 2xe^x - 2e^x + C_1$

Så $\int x^2 \cdot e^x\, dx = x^2 e^x - (2xe^x - 2e^x + C_1)$

$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - C_1$

$= \underline{\underline{(x^2 - 2x + 2)\, e^x + C}}$

$(C = -C_1)$

---

3. Integrasjon ved substitusjon

Kjerneregelen $g(u(x))' = g'(u) \cdot u'(x)$

hvor $u = u(x)$

<u>Eks</u> Beregn $\int (2x+1)^9\, dx \overset{\text{subst.}}{=} \int u^9 \cdot \frac{1}{2}\, du$

Setter $u = 2x+1$

Da er $du = (2x+1)'\, dx = 2\, dx \quad | :2$

Så $dx = \frac{1}{2}\, du$

$= \frac{1}{10} u^{10} \cdot \frac{1}{2} + C$

$= \underline{\underline{\frac{1}{20} \cdot (2x+1)^{10} + C}}$

Sjekk: Deriverer svaret ved å bruke kjerneregelen med $u = 2x+1$ og $g(u) = \frac{1}{20} u^{10} + C$

$u' = 2 \qquad g'(u) = \frac{1}{2} u^9$

Så $\left[\frac{1}{20}(2x+1)^{10} + C\right]'$

$= \cancel{2} \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}} u^9$

$= (2x+1)^9$ - Ok

Eks Beregn $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

Løsning Setter $u = x^2+1$

Da er $du = (x^2+1)'\,dx = 2x\,dx \quad |:2x$

så $dx = \frac{1}{2x}\,du$

Så $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{\cancel{2x}}{u} \cdot \frac{1}{\cancel{2x}}\,du = \int \frac{1}{u}\,du$

$= \ln|u| + C = \ln|x^2+1| + C$

$= \underline{\underline{\ln(x^2+1) + C}}$

Sjekker: $\left[\ln(x^2+1)+C\right]' = 2x \cdot \frac{1}{u} = 2x \cdot \frac{1}{x^2+1}$

$= \frac{2x}{x^2+1}$ - ok

Kjerneregel med

$u = x^2+1$ og $g(u) = \ln(u) + C$

$u' = 2x$ $\quad g'(u) = \frac{1}{u}$

Oppg Beregn

Setter

$u = 3x-1$ så

$du = (3x-1)'\,dx = 3\,dx$

dvs $dx = \frac{1}{3}\,du$

a) $\int \sqrt{3x-1}\,dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3}\,du$

$= \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1} + C}}$

b) $\int e^{8x-3}\,dx = \int e^u \cdot \frac{1}{8}\,du$

Setter $u = 8x-3$

$du = 8\,dx$

$dx = \frac{1}{8}\,du$

$= \frac{1}{8} e^u + C = \underline{\underline{\frac{1}{8} e^{8x-3} + C}}$