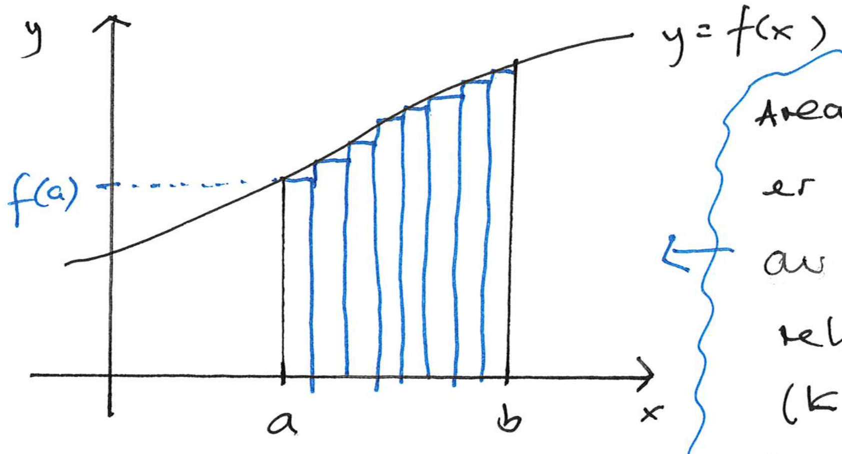
MET1180, 30. forelesning, 25. jan. 2024, Runar Ile

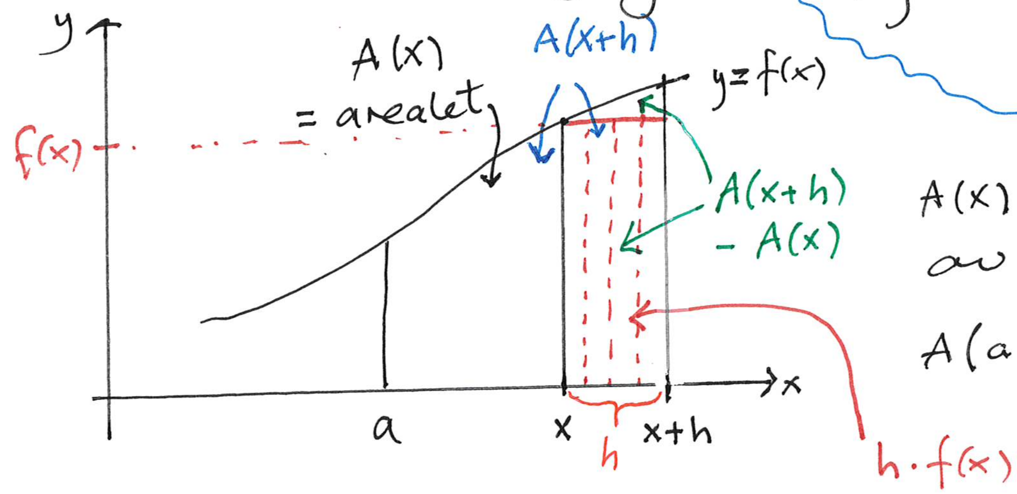
Plan
1. Arealet under grafen og analysens fundamentalteorem.
2. Økonomiske anvendelser av integralet.

1. Arealet under grafen



Arealet under grafen er omtrent summen av arealene til rektanglene (kalles en Riemannsum)
– bedre tilnærming hvis rektanglene er flere og smalere.
I grensen: $\int_a^b f(x)\,dx$

Lettere å finne alle arealene på én gang.



$A(x)$ er en funksjon av x, f.eks. $A(a) = 0$.

$$A'(x) \underset{h\to 0}{\longleftarrow} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{h \cdot f(x)}{h} = f(x)$$

Dvs $\boxed{A'(x) = f(x)}$. Dette er analysens fundamentalteorem.

Eks $\int_1^2 x^2\,dx$. Arealfunksjonen $A(x)$ har $A(1)=0$ og $A'(x)=x^2$

dvs $A(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$. Fra $A(1)=0$ får vi

$$\frac{1}{3}\cdot 1^3 + C = 0, \quad \text{dvs} \quad C = -\frac{1}{3}$$

og $A(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}$. Spesielt er

$$\int_1^2 x^2\,dx = A(2) = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot(8-1) = \underline{\underline{\frac{7}{3}}}$$

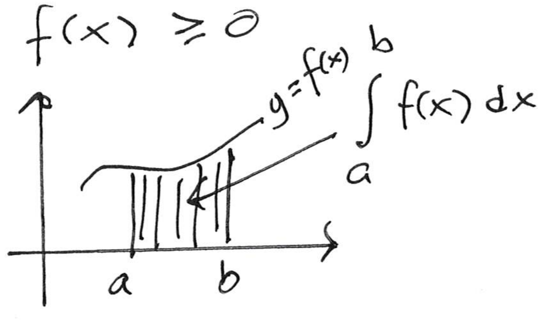
Også: $\underbrace{\frac{1}{3}\cdot 2^3 + \cancel{C} - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 + \cancel{C}\right)}_{F(2)-F(1)} = \underline{\underline{\frac{7}{3}}}$

$F(2) - F(1)$ for en vilkårlig anti-derivert.

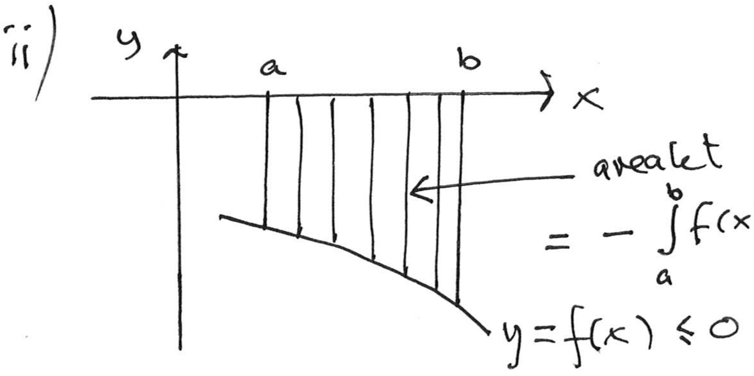
Her var $f(x)$ over x-aksen.

Anta $f(x) \geq g(x)$

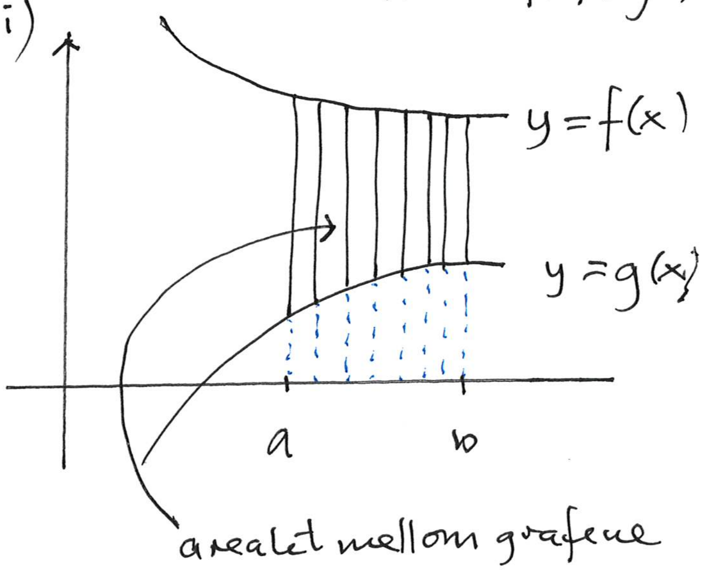
i) $f(x) \geq 0$



ii)



iii)



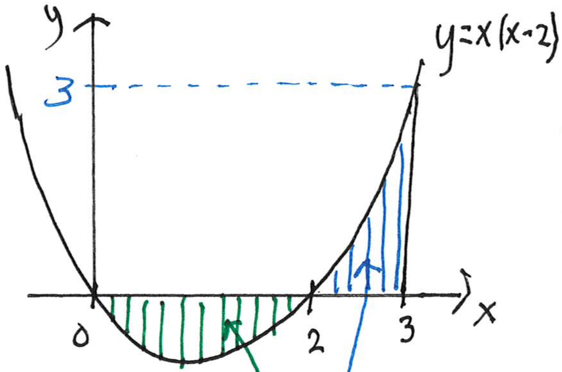
arealet mellom grafene

$$= \int_a^b f(x)-g(x)\,dx$$

Eks

$$\int_0^3 x(x-2)\,dx = \left[\tfrac13 x^3 - x^2\right]_0^3 = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot 3^{\cancel{3}\,2} - 3^2 - \left(\tfrac13\cdot 0^3 - 0^2\right)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$



$$x(x-2) = x^2 - 2x$$

$$\int x(x-2)\,dx = \tfrac13 x^3 - x^2 + C$$

Hver for seg:

$$\int_0^2 x(x-2)\,dx = \left[\tfrac13 x^3 - x^2\right]_0^2$$

$$= \tfrac13\cdot 2^3 - 2^2 - 0 = \frac83 - \frac{12}{3}$$

$$= \underline{\underline{-\frac43}}$$

$$\int_2^3 x(x-2)\,dx = \left[\tfrac13 x^3 - x^2\right]_2^3 = \tfrac13\cdot 3^3 - 3^2 - \left(\tfrac13\cdot 2^3 - 2^2\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac43}}$$

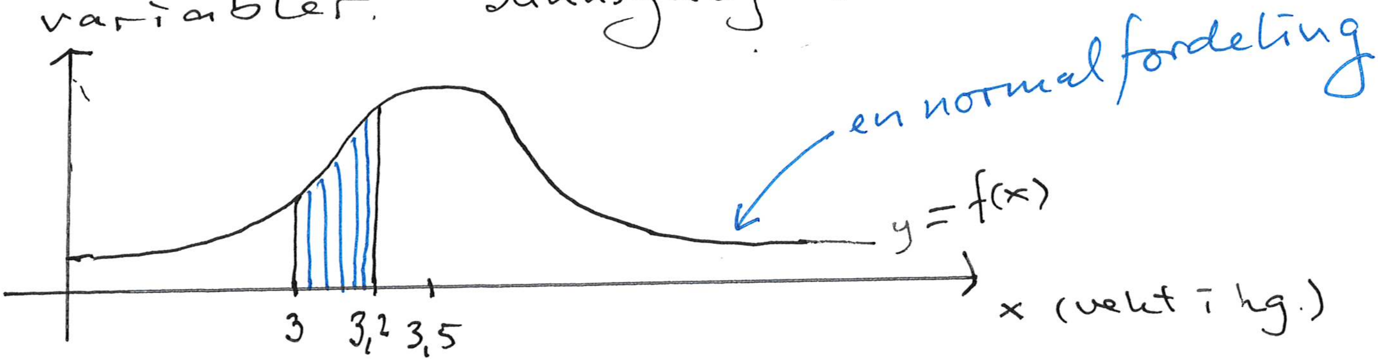
Det grønne arealet = det blå arealet fordi integralet er lik 0.

Start: 11.00

---

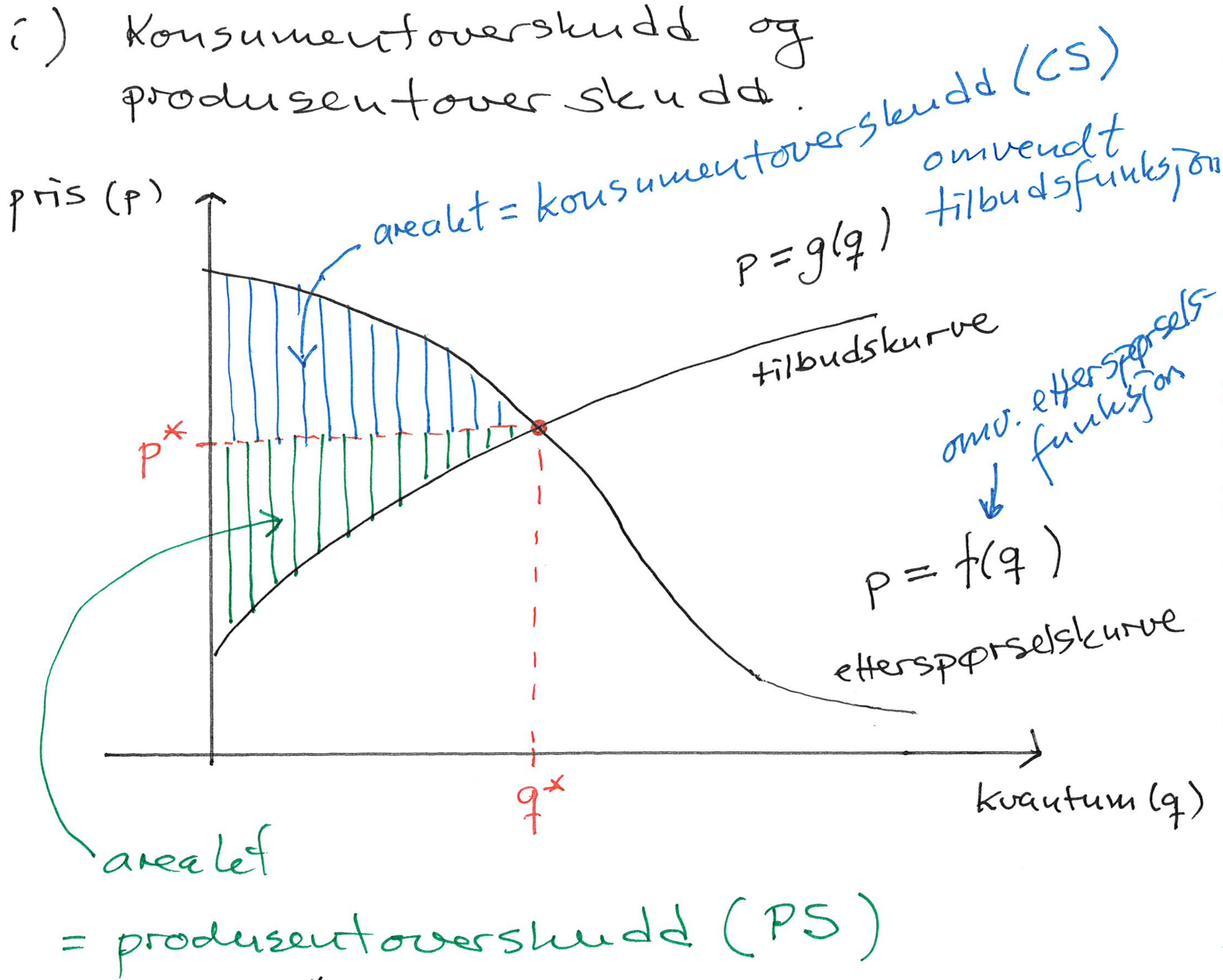
2. Økonomiske anvendelser

i) Kontinuerlige stokastiske variabler. Sannsynlighet = bestemte integraler.



Eks. Hva er sanns. for at laksen veier mellom 3 og 3,2 kg? Det er $\int_{3,0}^{3,2} f(x)\,dx$

ii) Konsumentoverskudd og produsentoverskudd.



$$CS = \int_0^{q^*} f(q) - p^* \, dq$$

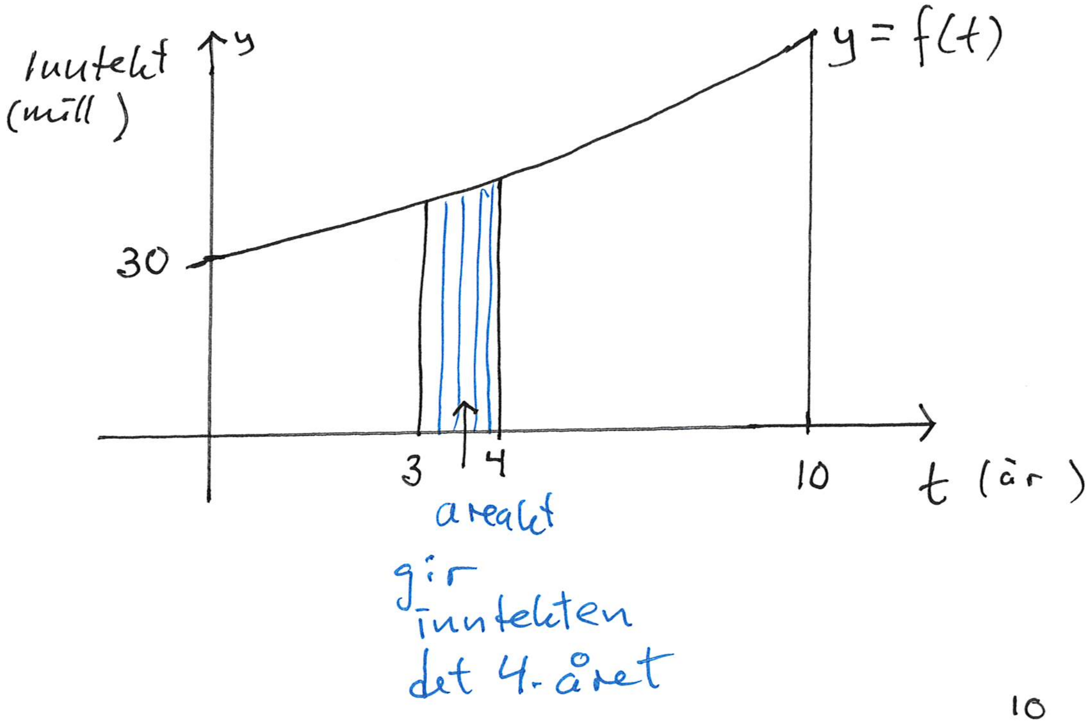
$$PS = \int_0^{q^*} p^* - g(q) \, dq$$

iii) Kontantstrømmer

Eks Du har leieinntekter på 30 mill/år og leieinntektene øker med 6 % i året. Bestem samlet leieinntekt over 10 år.

La $f(t)$ være årlig leieinntekt på tid t.

Da er $f(t) = 30 \cdot e^{0,06t}$



$$\text{Samlet leieinntekt} = \int_0^{10} f(t)\,dt = \int_0^{10} 30 \cdot e^{0,06t}\,dt$$

$$\int 30e^{0,06t}\,dt = \frac{30}{0,06}\int e^u\,du = 500\,e^u + C$$

$$= 500^{0,06t} + C$$

subst: $u = 0,06t$

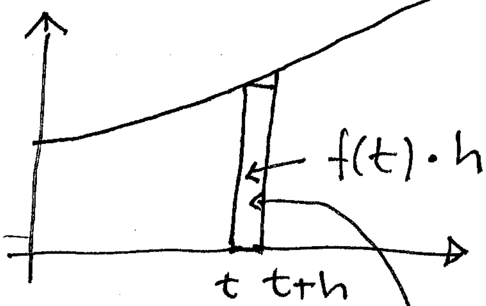
$du = 0,06\,dt$

$dt = \frac{1}{0,06}\,du$

$$\left[500e^{0,06t}\right]_0^{10} = 500\left(e^{0,6} - e^0\right)$$

$$= \underline{\underline{411,1}}$$

Men hva er <u>nåverdien</u> til denne kontantstrømmen hvis diskonteringsrenten er 10 % ?



Regner

$f(t)\,e^{-0{,}10t}$

$= 30 \cdot e^{0{,}06t} \cdot e^{-0{,}10t}$

$f(t)\,h\,e^{-0{,}10t}$

nåverdien til disse pengene

$= 30 \cdot e^{-0{,}10t + 0{,}06t}$

$= 30 \cdot e^{-0{,}04t}$

Nåverdien: $\displaystyle\int_0^{10} f(t) \cdot e^{-0{,}10t}\,dt$

$$= \int_0^{10} 30\,e^{-0{,}04t}\,dt = \frac{30}{-0{,}04}\Big[e^{-0{,}04t}\Big]_0^{10}$$

$$= -750\left(e^{-0{,}04 \cdot 10} - e^{-0{,}04 \cdot 0}\right)$$

$$= -750\left(e^{-0{,}4} - e^{0}\right) = -750\left(\frac{1}{e^{0{,}4}} - 1\right)$$

$$= 750\left(1 - \frac{1}{e^{0{,}4}}\right) = \underline{\underline{247{,}3}}$$