MET 1180, 31. forelesning, 30. jan. 2024, Runar Ile

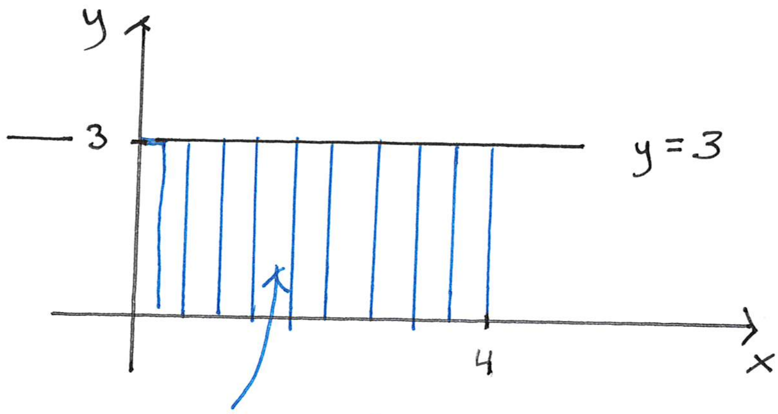
Repetisjon – fra veiledningen (oppg 2, 3, 4, 10)
– eksamensoppg. (22v oppg 2de, 22v oppg 3)

Veiledningsoppgaver

Oppg 2

a) $\int_0^4 3\,dx = \Big[3x\Big]_{x=0}^{x=4}$

$= 3\cdot 4 - 3\cdot 0 = \underline{\underline{12}}$



Arealet av dette rektangelet

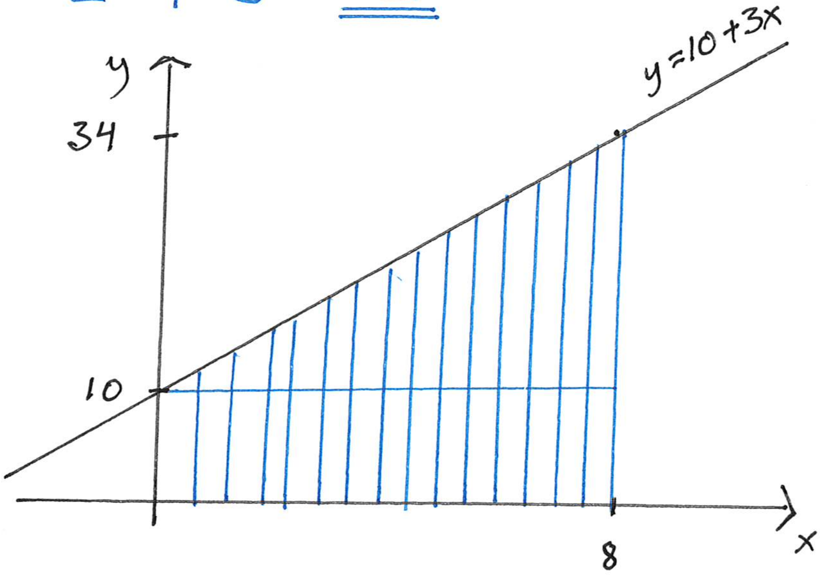
$= 4\cdot 3 = \underline{\underline{12}}$

b) $\int_0^8 10 + 3x\;dx$

$= \Big[10x + \frac{3}{2}x^2\Big]_0^8$

$= 10\cdot 8 + \frac{3}{2}\cdot 8^2 - (10\cdot 0 + \frac{3}{2}\cdot 0^2)$

$= 80 + 3\cdot 32 = \underline{\underline{176}}$



Arealet = arealet av rektangel + arealet av trekanten

$= 8\cdot 10 + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 24$

$= 80 + 96 = \underline{\underline{176}}$

c) $\int_{-2}^{2} |x| \, dx$

Definisjon:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{for } x \le 0 \\ x & \text{for } x \ge 0 \end{cases}$$

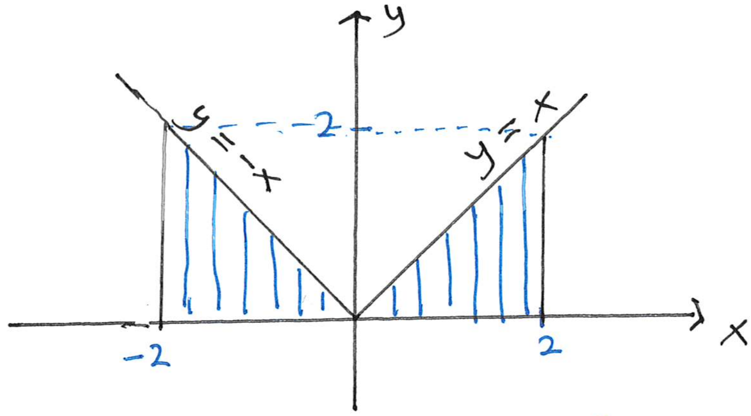
$$= \int_{-2}^{0} |x| \, dx + \int_{0}^{2} |x| \, dx$$

$$= \int_{-2}^{0} -x \, dx + \int_{0}^{2} x \, dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^{0} + \left[\tfrac{1}{2}x^2 \right]_{0}^{2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cdot 0^2 - \left(-\tfrac{1}{2}\cdot(-2)^2\right) + \tfrac{1}{2}\cdot 2^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 0^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot 4 + \tfrac{1}{2}\cdot 4 = \underline{\underline{4}}$$



Arealet under grafen

$$= 2\cdot\left(\frac{2\cdot 2}{2}\right) = \underline{\underline{4}}$$

d) $\int_{-1}^{3} x - |x| \, dx$

$$x - |x| = \begin{cases} x-(-x) & \text{for } x \le 0 \\ x - x & \text{for } x \ge 0 \end{cases}$$

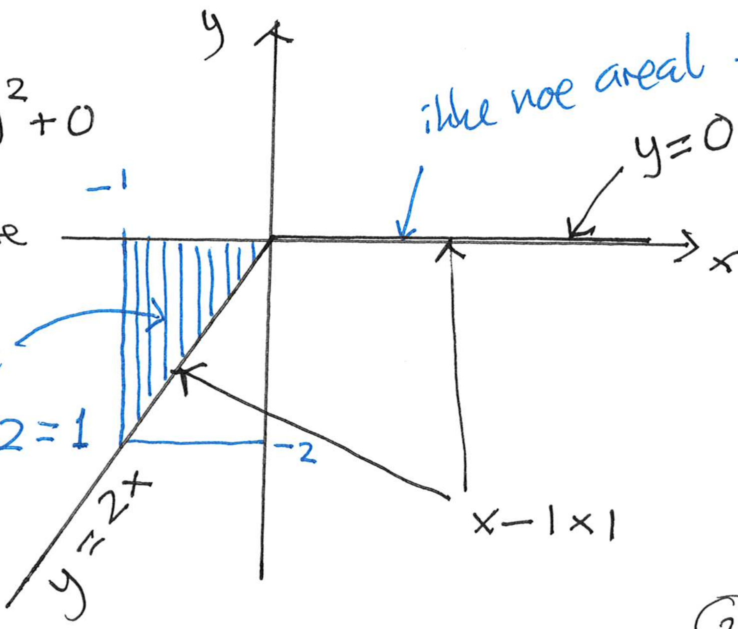
$$= \begin{cases} 2x & \text{for } x \le 0 \\ 0 & \text{for } x \ge 0 \end{cases}$$

$$= \int_{-1}^{0} 2x \, dx + \int_{0}^{3} 0 \, dx$$

$$= \left[x^2\right]_{-1}^{0} + \left[0\right]_{0}^{3} = 0^2 - (-1)^2 + 0$$

$$= \underline{-1}$$

. Fra figuren er dette - arealet over grafen.



Arealet

$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$

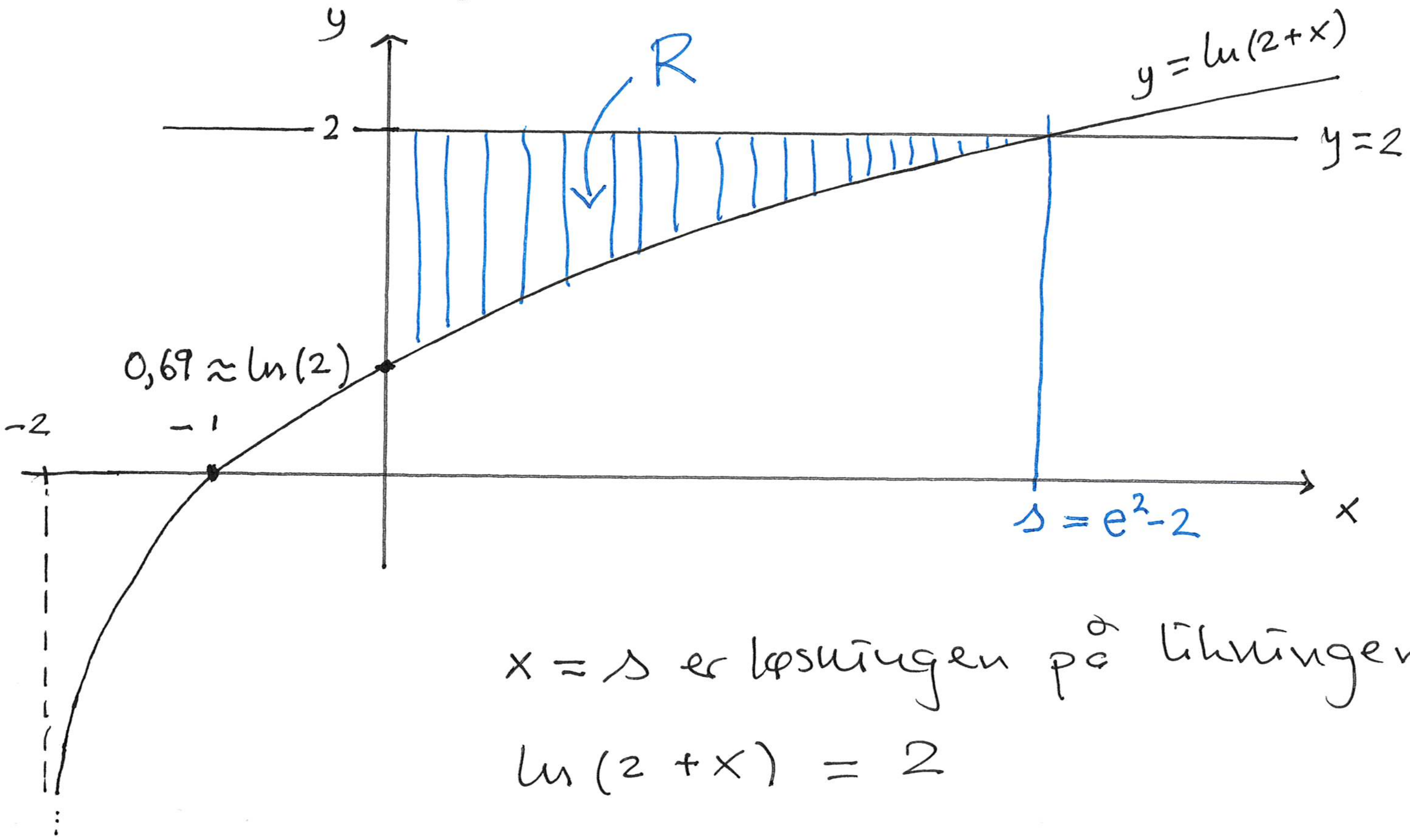
Fordi arealet er under x-aksen er integralet = - arealet

$= \underline{\underline{-1}}$

Oppg 3 $\quad A_1 - A_2 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \frac{18}{5}$

så $\quad A_1 = A_2 + \frac{18}{5} = \frac{22}{15} + \frac{18}{5} = \frac{22+54}{15} = \underline{\underline{\frac{76}{15}}}$

Oppg 4 $\quad$ a) $\quad R$ er begrenset av grafen til $y = \ln(2+x)$, linjen $y = 2$ og y-aksen.



$x = s$ er løsningen på likningen

$$\ln(2+x) = 2$$

$$2+x = e^{\ln(2+x)} = e^2$$

$$x = \underline{e^2 - 2} \approx 5{,}4$$

Da er arealet R gitt som

$$\int_0^{e^2-2} 2 - \ln(2+x)\,dx$$

Start: 11.02

$$\int 2 - \ln(2+x)\,dx = 2x - \left[(2+x)\ln(2+x) - (2+x)\right] + C$$

$$= 3x - (2+x)\ln(2+x) + \underline{2 + C}$$

så
$$\int_0^{e^2-2} 2 - \ln(2+x)\,dx = \Big[3x - (2+x)\ln(2+x)\Big]_0^{e^2-2}$$

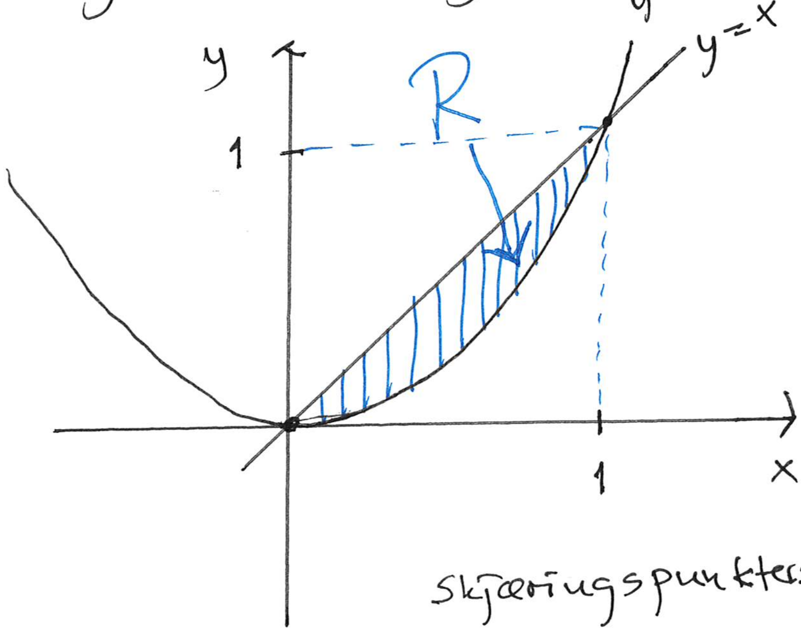
$$= 3(e^2-2) - (2+e^2-2)\ln(2+e^2-2)$$

$$-\Big(3\cdot 0 - (2+0)\ln(2+0)\Big)$$

$$= 3e^2 - 6 - e^2\cdot \underbrace{\ln(e^2)}_{2} + 2\ln(2)$$

$$= \underline{\underline{e^2 - 6 + 2\ln(2)}} = 2{,}7754$$

b) R er begrenset av grafene til $y = x$ og $y = x^2$.



$$R = \int_0^1 x - x^2\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot 1^2 - \tfrac{1}{3}\cdot 1^3 - 0$$

$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \underline{\underline{\tfrac{1}{6}}}$$

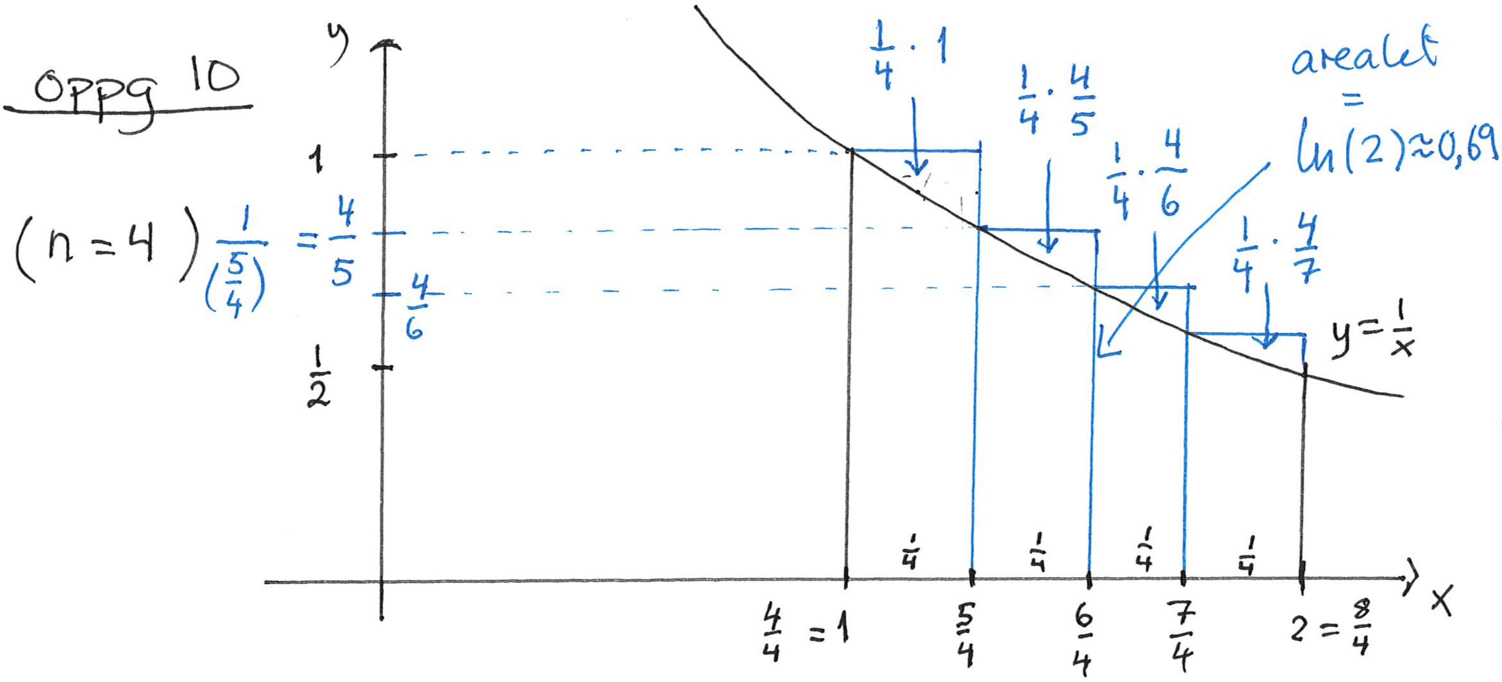
Skjæringspunkter:

$x^2 = x$ dvs

$x(x-1) = 0$

$\underline{x=0}$ el $\underline{x=1}$

Oppg 10



„Overarealet" når $n = 4$ er

$$\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{5} + \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{6} + \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{7}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = 0{,}76 \quad \left(2n-1 \overset{n=4}{=} 2\cdot 4 - 1 = 7\right)$$

Generelt (n intervaller med bredde $\frac{1}{n}$) gir

summen $\frac{1}{n}\cdot 1 + \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}}{n+1} + \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}}{n+2} + \dots + \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}}{2n-1}$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(2)$$

(Hvorfor $\ln(2)$? – jo, arealet er

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln(x)\right]_1^2 = \ln(2) - \overset{0}{\ln(1)}$$

$$= \underline{\ln(2)}$$

Eksamen 22V, oppg 2

d) Estimer $f(1) - f(0)$.

Vi har $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)\,dx = -$ arealet over grafen til $f'(x)$.

arealet $\approx$ 4 ruter

1 rute $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$\approx -\left(4 \cdot \frac{1}{16}\right)$

$= -\frac{1}{4} = \underline{\underline{-0{,}25}}$

Eksamen	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Dato	23. mai 2022 kl 0900 - 1400

Eksamensoppgaven består av 16 deloppgaver som vektes likt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1.
Vi ser på et lineært system med parameter a, gitt på matriseform som

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 6 \\ 3 & a & 7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

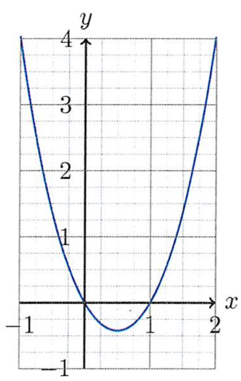
(a) **(6p)** Løs det lineære systemet når $a = -12$.
(b) **(6p)** Bestem eventuelle verdier av a slik at det lineære systemet ikke har løsninger.

Oppgave 2.
Regn ut disse integralene:

a) **(6p)** $\displaystyle\int_0^1 6\sqrt{x} - 11\,x\sqrt[5]{x}\,\mathrm{d}x$ b) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{21 - x}{9 - x^2}\,\mathrm{d}x$ c) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{1}{1 - \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Figuren nedenfor viser grafen til $f'(x)$ for en funksjon f med definisjonsområde $D_f = [-1,2]$.

d) **(6p)** Estimer verdien av $f(1) - f(0)$. Angi resultatet du bruker.
e) **(6p)** Finn x-koordinatene til maksimums- og minimumspunktene til f, hvis de eksisterer.



FIGUR 1. Grafen til $f'(x)$

Oppgave 3.
La matrisen A være gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(a) **(6p)** Finn A^{-1} når $a = 0$.
(b) **(6p)** Regn ut determinanten $|A|$ for en vilkårlig verdi av a, og avgjør når $|A| = 0$.
(c) **(6p)** Finn en vektor $\mathbf{x} = (x,y,z) \neq (0,0,0) = \mathbf{0}$ og en verdi av a slik at $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.